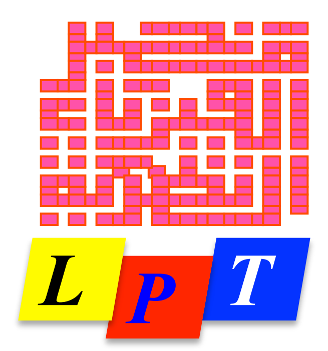
Optique ondulatoire




Université Mohammed V, Rabat, Agdal
Faculté des Sciences,
Département de Physique,
Laboratoire de Physique Théorique


elrhaleb@fsr.ac.ma

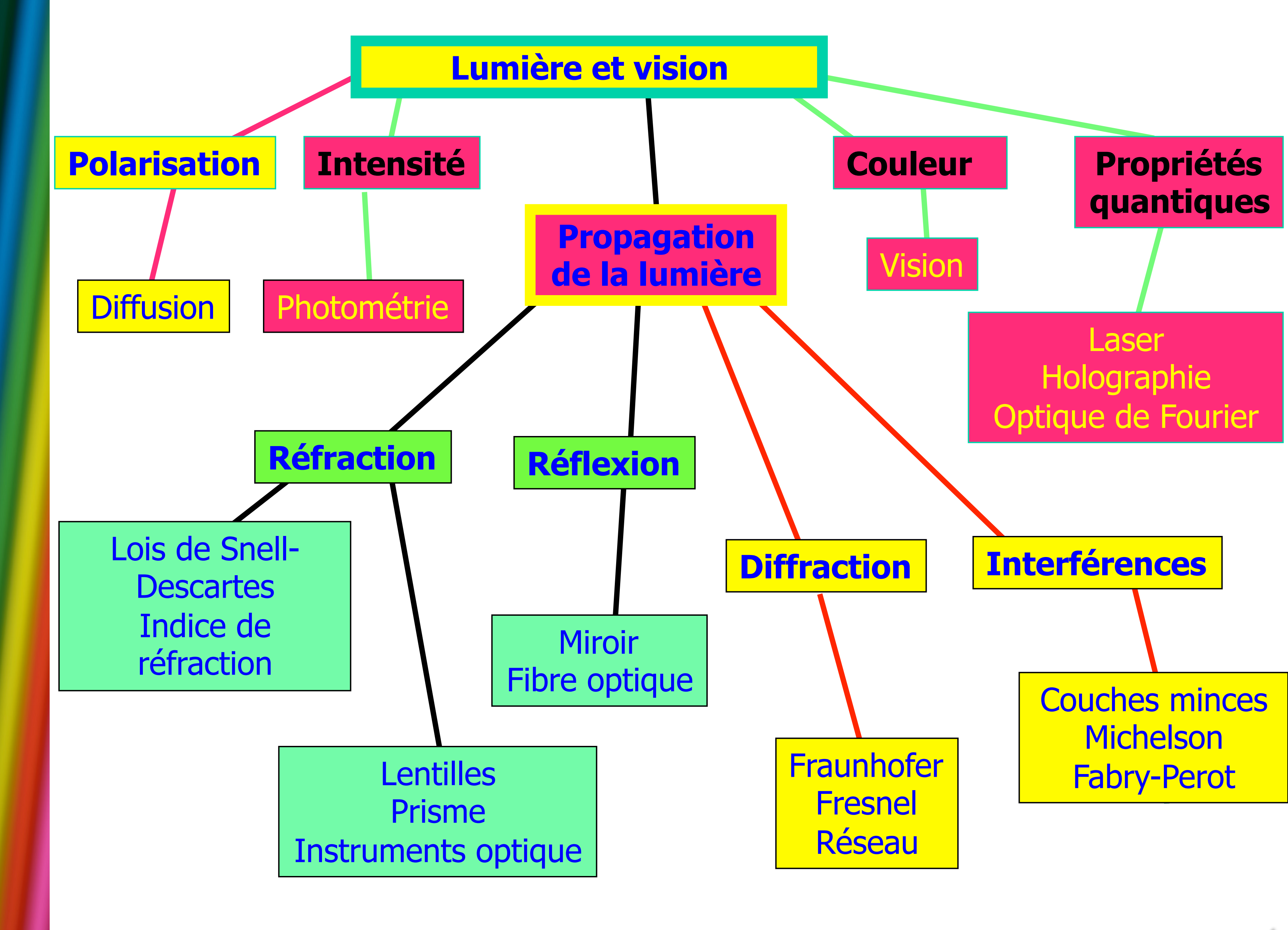


A l'origine, l'*optique* est la science qui étudie les propriétés de la lumière et les lois de la vision.

Aujourd'hui, l'optique est la discipline scientifique et technique qui étudie la *production*, la *transmission* et la *détection* de la lumière.

Le domaine spectral couvert par l'optique est très étendu, couvrant des rayonnements X aux ondes millimétriques ce qui lui permet d'intervenir dans de nombreux domaines :

- ✓ **Télécommunication,**
- ✓ **Métrologie,**
- ✓ **Médecine (chirurgie, imagerie,…),**
- ✓ **Environnement,**
- ✓ **Astronomie,**
- ✓ **Aéronautique,**
- ✓ **et dans la recherche scientifique.**



Lumière et vision
Polarisation
Intensité
Couleur
Propriétés quantiques
Diffusion
Photométrie
Propagation de la lumière
Vision
Laser
Holographie
Optique de Fourier
Réfraction
Réflexion
Lois de Snell-Descartes
Indice de réfraction
Diffraction
Interférences
Miroir
Fibre optique
Couches minces
Michelson
Fabry-Perot
Lentilles
Prisme
Instruments optique
Fraunhofer
Fresnel
Réseau

Plan du cours

Chapitre I – Aspect ondulatoire de la lumière

Chapitre II – Polarisation

Chapitre III – Diffraction de Fraunhofer

Chapitre IV – Interférences lumineuses

Chapitre V – Réseaux

Chapitre I

Aspect ondulatoire de la lumière

L'*optique géométrique* est une restriction de l'optique ondulatoire : en optique géométrique, on ne se préoccupe que de la direction locale $\vec{u}(M)$ de la propagation de l'onde et de la célérité locale c(M).

Le but de ce chapitre est d'assurer la transition vers l'*optique ondulatoire* où on s'intéresse à la *phase* de la grandeur physique qui se propage et à l'*énergie* transportée par l'onde.

I – Généralités sur la vibration lumineuse

Les ***ondes lumineuses*** sont des ondes électromagnétiques, décrites par deux champs vectoriels, électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ qui vérifient l'équation d'onde suivante dans un milieu transparent, homogène et isotrope :

$$\Delta U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad U = E \text{ ou } B$$

v est la vitesse de propagation (dépend de la nature du milieu).

L'analyse de *Fourier* permet de considérer l'onde **U(M,t)** émise par une source ponctuelle, comme une somme de fonctions sinusoïdales du temps de pulsation **ω**.

I – Généralités sur la vibration lumineuse

On peut donc décomposer U(M,t) en ondes monochromatiques, c.à.d de la forme :

$$U(M,t) = A(M)\cos\left(\omega(t - \tau_M) - \varphi_S\right)$$

- ✓ A(M) est fonction de M (l'amplitude de l'onde) ;
- ✓ ω est la pulsation. Elle est reliée à la période T et à la fréquence ν de la radiation par les relations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- ✓ τ_M est le temps mis par la lumière pour se propager d'un point source S à un point d'observation M.
- ✓ $\omega\tau_M + \varphi_S$ est la phase au point M.

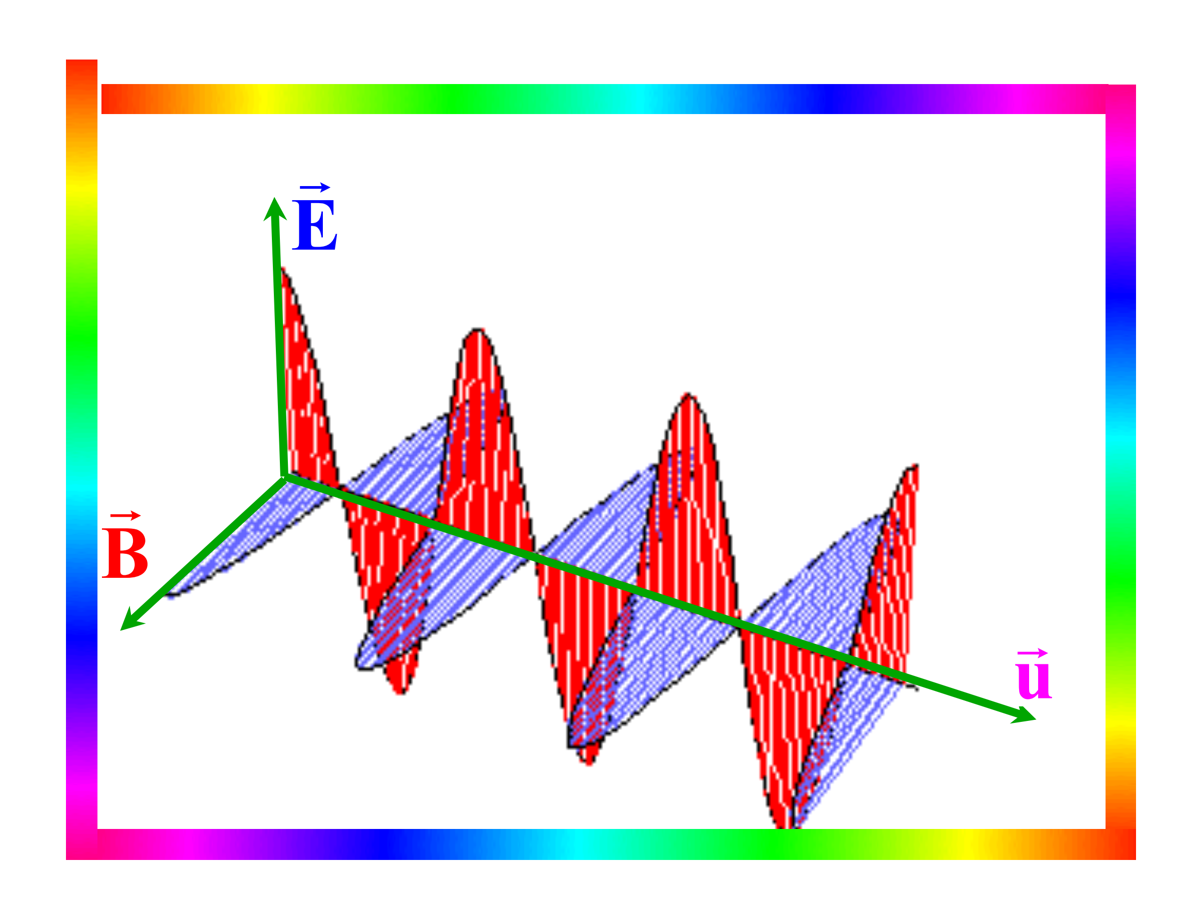
I – Généralités sur la vibration lumineuse

En reportant ces fonctions dans les équations de *Maxwell* on obtient les résultats suivants :

- ✓ Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont dans la plan d'onde perpendiculaire à la direction de propagation;
- ✓ Le vecteur de *Poynting* $\vec{P}$ est perpendiculaire au plan d'onde $\Rightarrow$ la direction de propagation de l'onde est aussi la direction de propagation de l'énergie. $\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$
- ✓ Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont, à chaque instant, perpendiculaires l'un à l'autre en chaque point.
- ✓ Les modules de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont proportionnels : $\dfrac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = v$
- ✓ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre : $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{v}$

I – Généralités sur la vibration lumineuse

Pour une onde polarisée rectilignement, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux entre eux et dans un plan fixe.



II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

II.1 – Le chemin optique

Soit ℓ l'abscice curviligne le long du rayon lumineux allant de S à M. Le retard τ_M s'exprime alors :

$$\tau_M = \int_0^{\tau_M} dt = \int_S^M \frac{dt}{d\ell} d\ell = \int_S^M \frac{1}{v(P)} d\ell = \frac{1}{c}\int_S^M n(P)\, d\ell$$

On appelle *chemin optique* le long du trajet SM l'expression :

$$L_{SM} = \int_{SM} n(P)\, d\ell = c\tau_M$$

Le chemin optique est donc une mesure en unité de longueur du temps mis par la lumière pour se propager de S en M.

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

L'expression de l'onde lumineuse devient :

$$U(M,t) = A(M)\cos\left(\omega t - \omega\frac{L_{SM}}{c} - \varphi_S\right)$$

Soit en introduisant la longueur d'onde dans le vide λ_o :

$$U(M,t) = A(M)\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{L_{SM}}{\lambda_o} - \varphi_S\right)$$

Pour alléger l'écriture, on utilise le retard de phase φ_M :

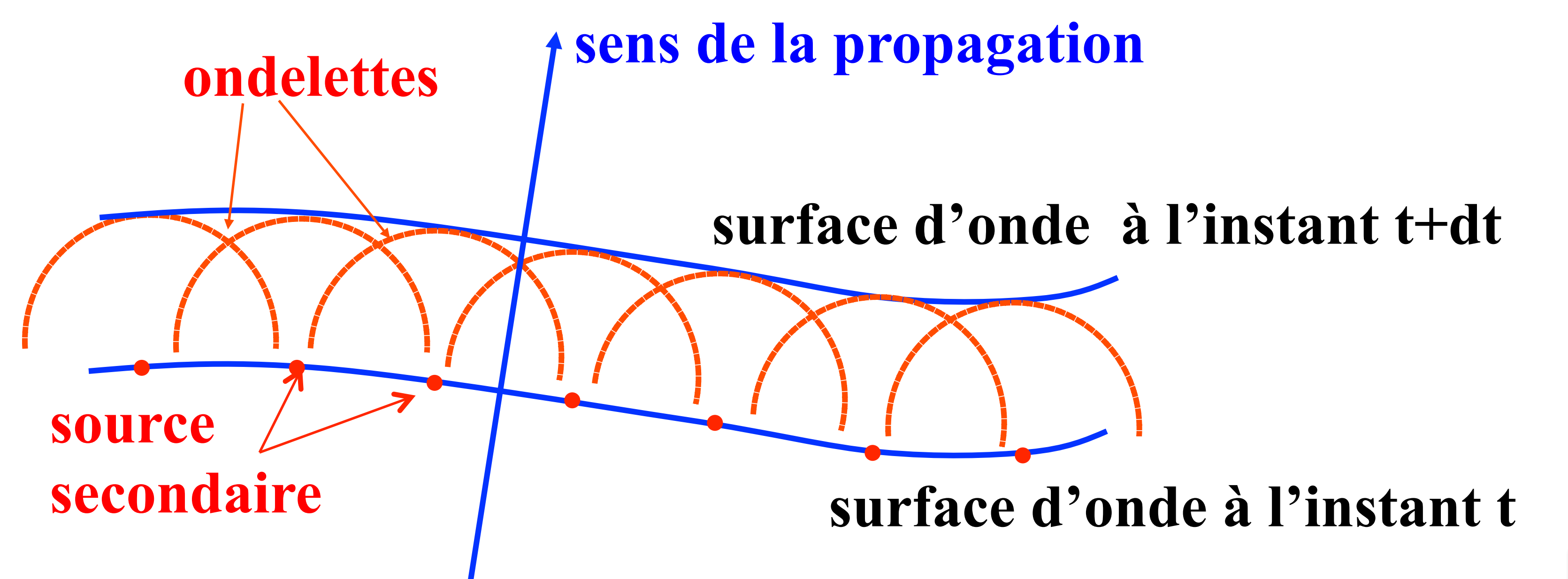
$$U(M,t) = A(M)\cos\left(\omega t - \varphi_M\right)$$

où $\varphi_M = \varphi_S + 2\pi\frac{L_{SM}}{\lambda_o}$

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

II.2 – Principe de Huyghens

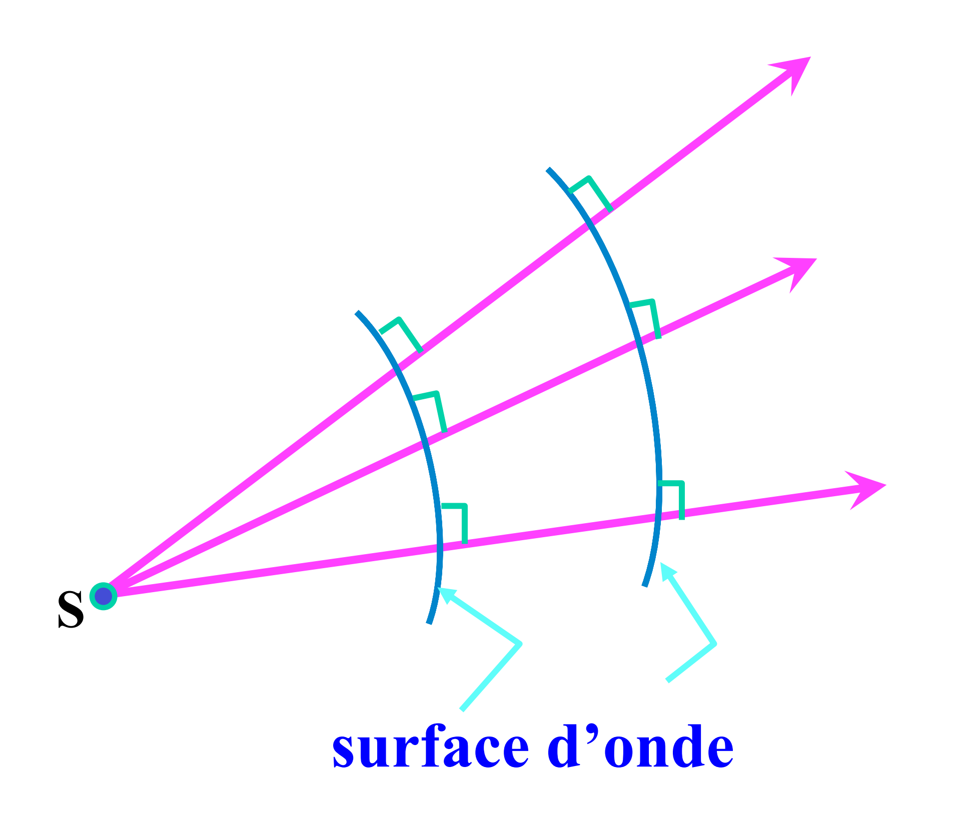
" Les points d'égale perturbation lumineuse forment un ensemble appelé *surface d'onde*. Chacun de ces points se comporte comme une source secondaire qui émet des *ondelettes* sphériques si le milieu est isotrope. L'enveloppe de ces ondelettes forme une nouvelle surface d'onde."



II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

II.3 – Théorème de Malus

Définition : Dans un milieu isotrope, les rayons lumineux sont localement perpendiculaires aux surfaces d'onde.



Le théorème de *Malus* relie directement cette notion caractéristique de l'optique ondulatoire, à la notion de rayon lumineux qui est fondamentale en optique géométrique.

II.4 – Notion d’éclairement

Dans le visible, les fréquences sont élevée ($\nu \sim 10^{15}$ Hz), les détecteurs d’ondes lumineuses ne donc sont sensibles qu’à une moyenne temporelle.

Un détecteur linéaire, qui serait sensible à $\langle U(M,t) \rangle$ serait inefficace car cette valeur moyenne est nulle.

Les détecteurs utilisés en optique (photodiodes, photorésistances, photomultiplicateurs, …) sont sensibles à $\langle U^2(M,t) \rangle$.

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

On appelle intensité en un point M la grandeur :

$$I(M) = 2\langle U^2(M,t)\rangle$$

$$I(M) = \frac{2}{T}\int_0^T A^2(M)\cos^2(\omega t - \varphi_M)\,dt$$

Sachant que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$$I(M) = \frac{A^2(M)}{T}\int_0^T \left(1+\cos(2\omega t - 2\varphi_M)\right)dt$$

En intégrant

$$I(M) = \frac{A^2(M)}{T}\left[t + \frac{\sin(2\omega t - 2\varphi_M)}{2\omega}\right]_0^T = \frac{A^2(M)}{T}\left(T+0\right)$$

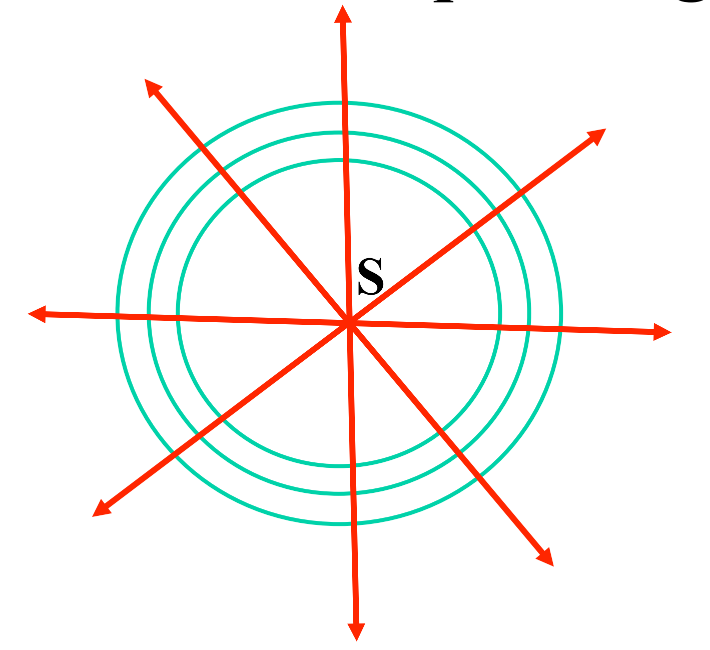
d'où $$I(M) = A^2(M)$$

II.5 – Onde sphérique

L'*onde sphérique* est l'onde émise par une source ponctuelle dans un milieu homogène.

D'après l'expression du chemin optique, les surfaces d'ondes ont pour équation : $n\overline{SM} = cte$

de telle sorte qu'il s'agit d'une sphère de centre S.



La puissance émise par la source S se répartit de manière isotrope dans l'espace. L'intensité I ne dépend que de la distance $r = SM$.

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

La puissance moyenne totale reçue par une sphère de centre S et de rayon r s'écrit :

$$P = \iint_{(S)} I(r)\,dS = I(r) \iint_{(S)} dS = 4\pi r^2 I(r)$$

Si le milieu n'est pas absorbant, la puissance P reçue par la sphère de rayon r se trouve un peu plus tard sur une sphère de rayon $r' > r$, de telle sorte que finalement P ne dépend pas de r. Ainsi :

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} \equiv \frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad A(r) = \sqrt{I(r)} \equiv \frac{1}{r}$$

L'amplitude instantanée d'une onde sphérique s'écrit :

$$U(M,t) = \frac{K}{r} \cos\left(\omega t - \varphi_S - 2\pi \frac{nr}{\lambda_o} \right)$$

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

II.6 – Onde plane

L'*onde plane* est la limite d'une onde sphérique, lorsque la source est infiniment loin de la zone d'observation. Dans ce cas, localement, la direction de propagation est constante et les surfaces d'ondes sphériques sont assimilables à leurs plans tangents.

Une lentille mince utilisée en collimateur transforme une onde sphérique émise par S placée dans son plan focal objet en une onde plane, au voisinage de l'axe optique.

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

Phase d'une onde plane

La source **S** étant à l'infini, tous les chemins optiques L_{SM} sont infinis. Pour exprimer φ_M, on fais intervenir un point **O** quelconque et se contente de comparer φ_M et φ_O.

M
H
$\vec{u}$
O
$\vec{u}$

$$\varphi_M - \varphi_O = \frac{2\pi}{\lambda_o}(L_{SM} - L_{SO})$$

$$L_{SM} - L_{SO} = L_{SH} + L_{HM} - L_{SO}$$
$$= L_{HM}$$
$$= nHM$$

HM représente la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le rayon lumineux passant par **M**.

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

$$\varphi_M = \varphi_O + \frac{2\pi n\,\vec{u}.\overrightarrow{OM}}{\lambda_o}$$

On définit le *vecteur d'onde* $\vec{k}$ par :

$$\vec{k} = \frac{2\ \ n}{\lambda_o}\vec{u}$$

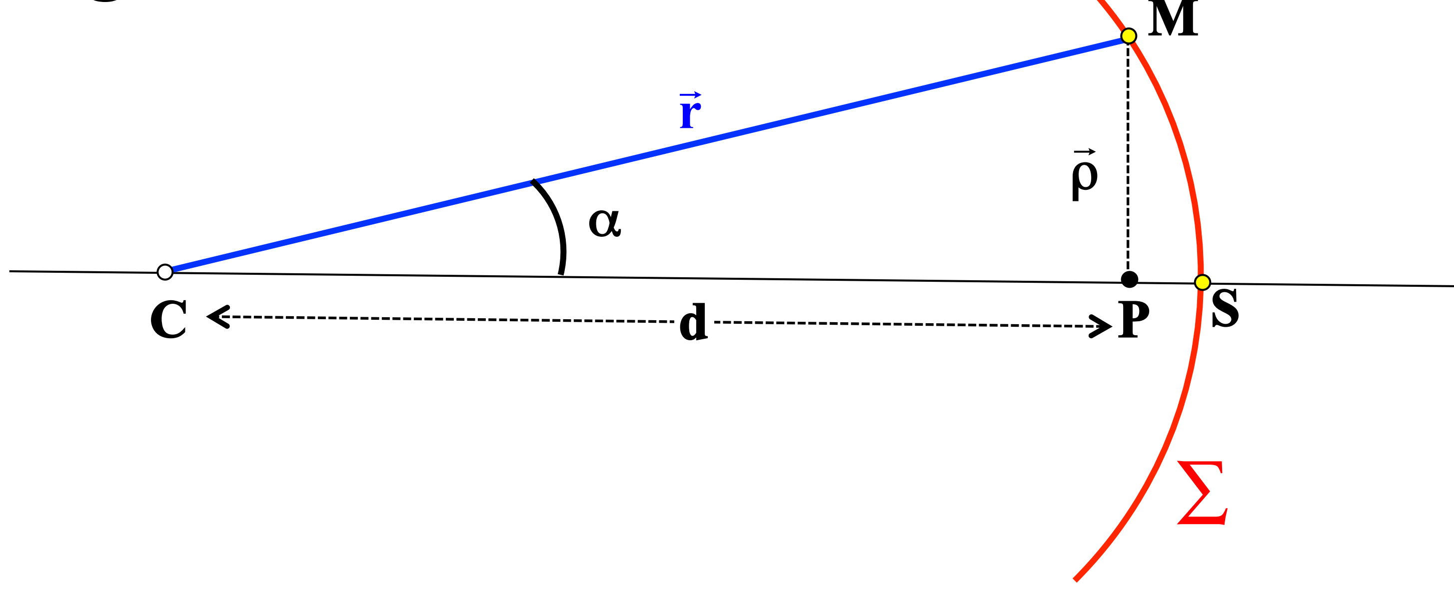
Pour une onde plane on écrit donc :

$$U(M,t) = A.\cos(\omega t - \varphi_o - \vec{k}.\overrightarrow{OM})$$

II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

II.7 - Développement limité de l'onde sphérique

Pour le calcul de la superposition des ondes sphériques émises par les sources secondaires d'*Huygens* considérées sur l'objet diffractant, il est utile au préalable de réaliser un développement limité de l'amplitude complexe d'une onde sphérique au voisinage de son axe.



II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

L'amplitude complexe en M de l'onde sphérique divergente sachant que l'origine des phases est prise en C est :

$$A(M) = \frac{\exp(ikr)}{r}$$

La variation d'amplitude due à la présence de r au dénominateur est négligeable devant la variation de phase de l'exponentielle complexe, puisque $d \gg \lambda$. Au dénominateur, on posera donc $r \approx d$.

$$CM = CP + PS = d + CM\left[1 - \cos(\alpha)\right]$$

Pour les points M près de l'axe (α faible) :

$$CM \approx d + d\frac{\alpha^2}{2}$$

En appelant ρ le vecteur de coordonnées du point M, l'amplitude devient :

$$A(M) = \frac{\exp(ikd)}{d} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2d} \right)$$

En général, le terme de propagation exp(ikd) est de peu d'intérêt. On prend alors l'origine des phases au niveau de l'axe où l'on travaille, c'est-à-dire en P.

Dans ce cas, l'amplitude complexe d'une onde sphérique divergente se réduit à :

$$A(\rho) = \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2d} \right)$$

et celle d'une onde sphérique convergente à :

$$A(\rho) = \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2d} \right)$$

II.8 - Transparence en amplitude

Considérons un objet plan transparent éclairé par une onde incidente d'amplitude complexe A_i. Appelons A_e l'amplitude complexe de l'onde émergente. Les fonctions A_i et A_e désignent ces amplitudes respectivement juste avant et juste après l'objet.

On appellera *transparence* en amplitude de l'objet et l'on notera T le rapport :

$$T = \frac{A_e}{A_i}$$

Cas d'une lentille

L'effet d'une lentille convergente ou divergente peut se décrire très simplement dans le cadre de ces approximations.

Une lentille convergente transforme une onde plane en une onde convergente. Si l'on prend l'origine des phases au niveau du plan de la lentille, l'amplitude complexe d'une onde incidente plane est :

$$A_i = 1$$

et l'amplitude complexe de l'onde émergente est :

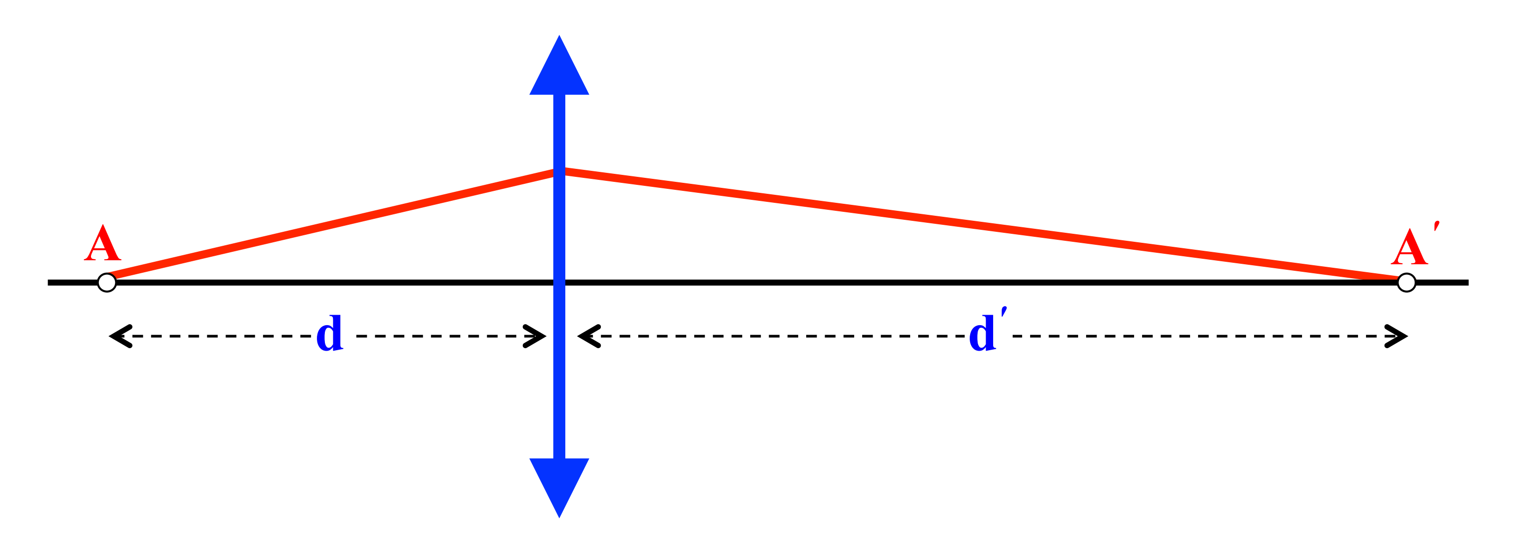
$$A_e(\rho) = \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2f'}\right)$$

distance focale de la lentille

Donc, la transparence en amplitude d'une lentille convergente est :

$$T(\rho) = \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2f'}\right)$$

Prenons maintenant une lentille convergente éclairée par une onde sphérique issue d'un point source A situé à une distance d avant la lentille.



II – Modèle scalaire des ondes lumineuses

L'amplitude complexe de l'onde incidente est, dans le plan de la lentille:

$$A_i(\rho) = \exp\left(ik\frac{\rho^2}{2d}\right)$$

et celle de l'onde émergente est égale à :

$$A_e(\rho) = \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2d'}\right)$$

mais elle est aussi égale à :

$$A_e(\rho) = T(\rho)A_i(\rho) = \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2f'}\right)\exp\left(ik\frac{\rho^2}{2d}\right)$$

On en déduit que nécessairement :

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$$

Relation de conjugaison d'une lentille mince

Chapitre II

Polarisation



H. EL RHALEB

Université Mohammed V, Rabat, Agdal

Faculté des Sciences,

Département de Physique,

Laboratoire de Physique Théorique

Equipe Photonique

elrhaleb@fsr.ac.ma





Ce chapitre aborde le caractère *vectoriel* de la lumière.

Dans les chapitres qui vont suivre, les milieux transparents vont être considérés isotropes. Or, il existe des milieux pour lesquels les propriétés optiques dépendent de la direction.

Pour de tels milieux anisotropes, la description vectorielle devient nécessaire.

I - Le modèle vectoriel

I.1 - Le vecteur lumineux

Le modèle ondulatoire est un modèle vectoriel.

Par exemple les équations de *Maxwell* dans le vide conduisent à des solutions « ondes planes » telles que le trièdre ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$) est direct.

Le vecteur lumineux n'est autre que le vecteur *champ électrique* de l'onde électromagnétique, c'est le seul auquel soient sensibles les récepteurs usuels (œil, cellule photoélectrique, etc.) est s'écrit donc :

$$\vec{E} = E_o \vec{u} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$\vec{u}$: vecteur unitaire transversal

I - Le modèle vectoriel

I.2 - Les différentes polarisations

I.2.1 – La lumière naturelle

Une lumière est dite ***naturelle*** si dans le plan de vibration, le champ $\vec{E}$ ne présente aucune direction privilégiée. Les composantes du vecteur vibrant $\vec{E}$ n'ont aucune relation de phase.

La configuration du vecteur vibrant à l'instant $t + \Delta t$ est complètement différente de celle de l'instant t.

$\vec{E}$

S

$\vec{E}$

$\vec{E}$

Ce changement est lié au caractère totalement aléatoire de l'émission lumineuse.



I.2.2 – La lumière polarisée

Une onde est dite polarisée si les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$, ont une relation de phase.

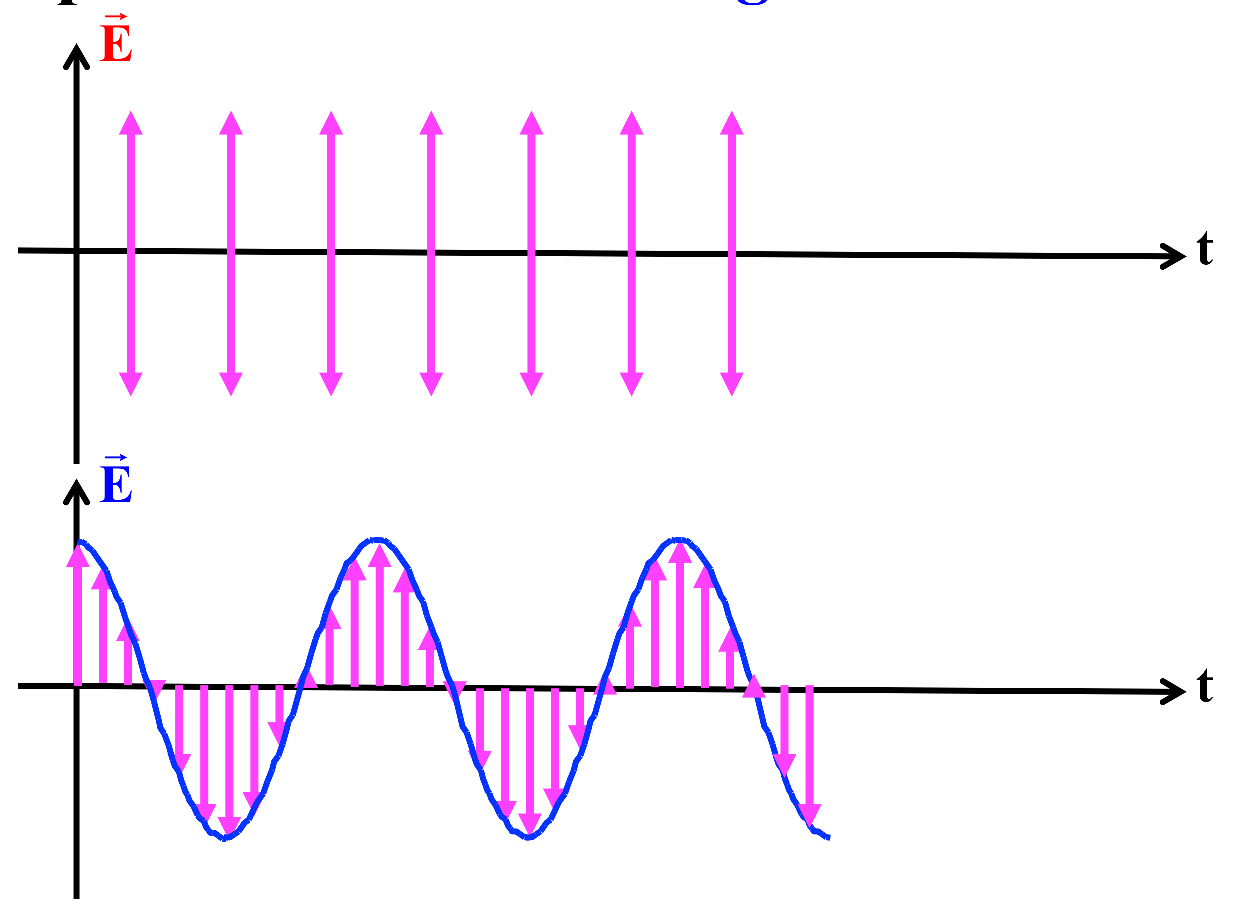
a – Description dans un plan d'onde

Pour décrire le champ, on se place dans le plan xy et on décrit l'évolution du vecteur $\vec{E}$.

$$\begin{cases} E_x = E_{ox}\cos(\omega t - \varphi_1) \\ E_y = E_{oy}\cos(\omega t - \varphi_2) \end{cases}$$

I - Le modèle vectoriel

- Si, $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, le champ garde une direction fixe, la polarisation est *rectiligne*.
- Si, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, le champ garde encore une direction fixe, la polarisation est *rectiligne*.



I - Le modèle vectoriel

- Dans le cas général $\varphi_2 - \varphi_1$ n' est pas un multiple de π.

Avec une nouvelle origine, on peut écrire :

$$\begin{cases} E_x = E_{ox}\cos(\omega t) & (1) \\ E_y = E_{yo}\cos(\omega t - \varphi) & (2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$(2) \Rightarrow \frac{E_y}{E_{oy}} = \cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$= \frac{E_x}{E_{ox}}\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t)\sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}}\cos(\varphi)$$

$$(1) \Rightarrow \cos(\omega t)\sin(\varphi) = \frac{E_x}{E_{ox}}\sin(\varphi)$$

I - Le modèle vectoriel

En éliminant le temps, on obtient l'équation de la courbe cherchée :

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

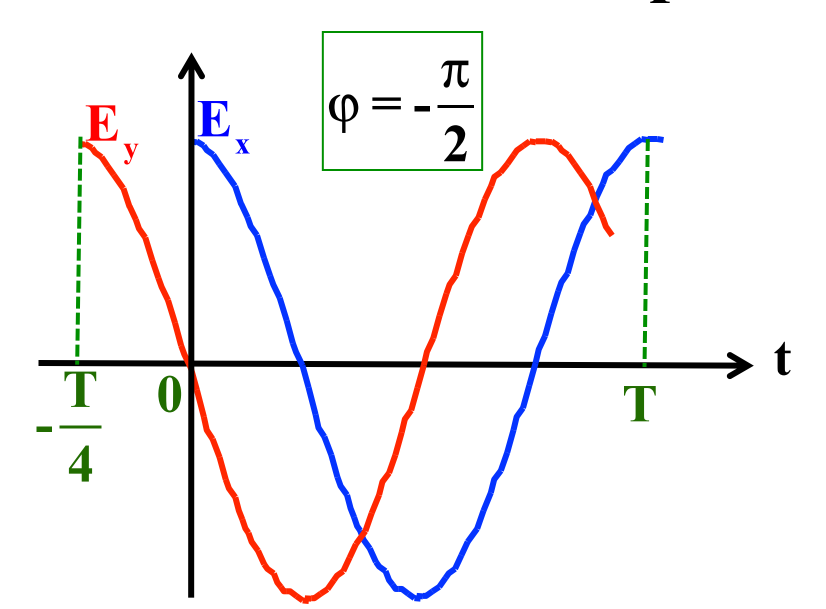
C'est l'équation d'une *ellipse* : l'extrémité du champ décrit une ellipse. Suivant la valeur de φ, l'ellipse est décrite dans un sens ou dans l'autre.

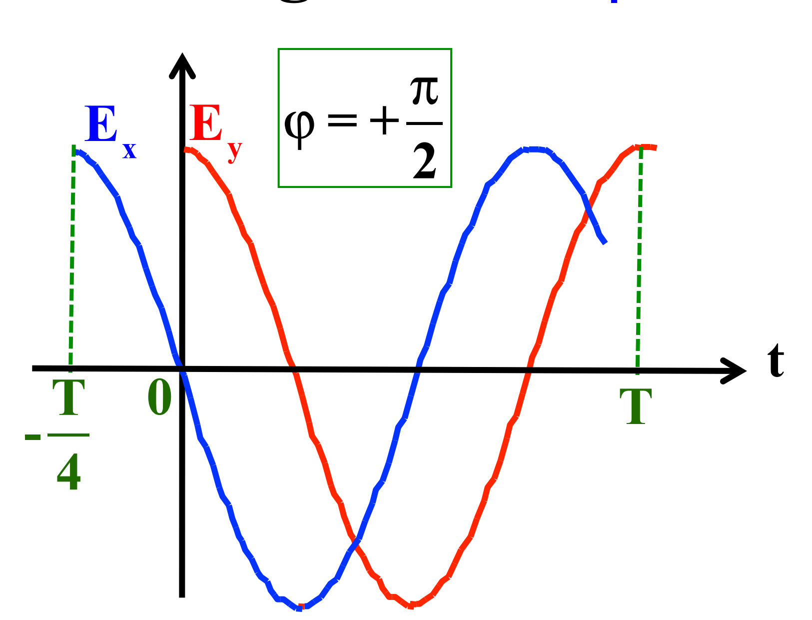
Remarque

Pour obtenir le sens de rotation de l' ellipse, il consiste à remarquer que E_x est maximal pour $t = 0$ et que :

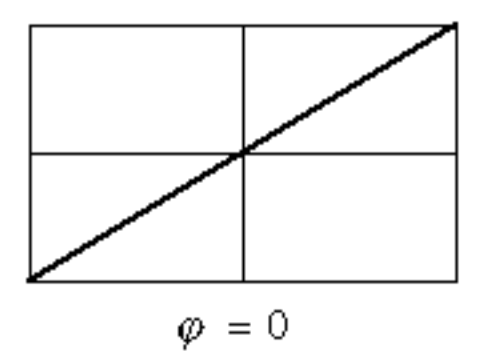
$$\left(\frac{dE_y}{dt}\right)_{t=0} = E_{oy}\omega \sin\varphi$$

le sens de rotation dépend donc du signe de $\sin\varphi$.

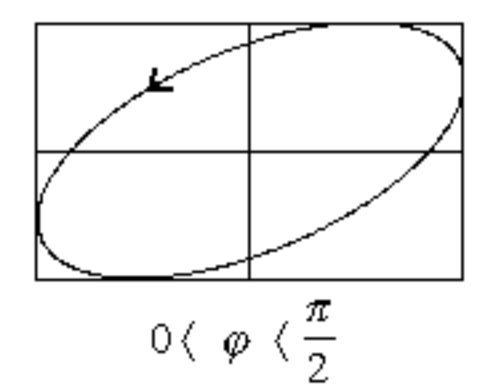




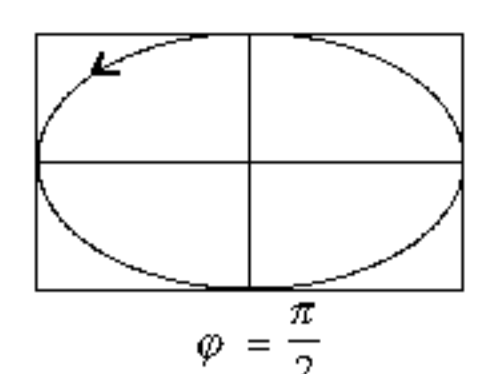
I - Le modèle vectoriel



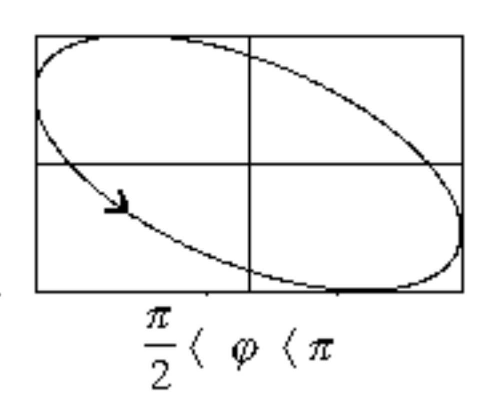
$\varphi = 0$



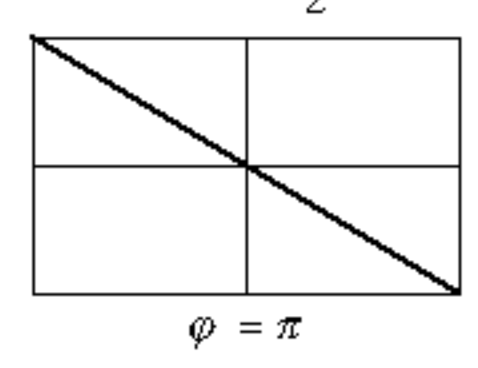
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$



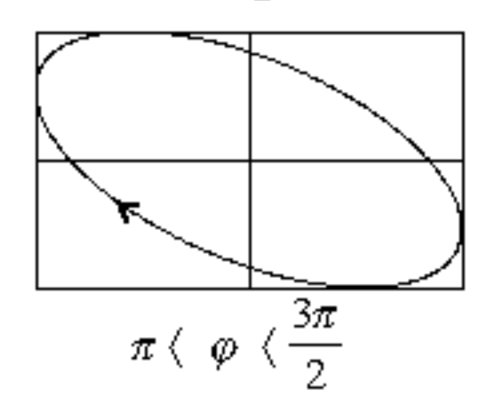
$\varphi = \frac{\pi}{2}$



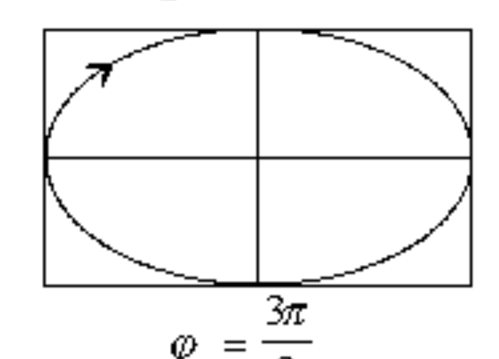
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$



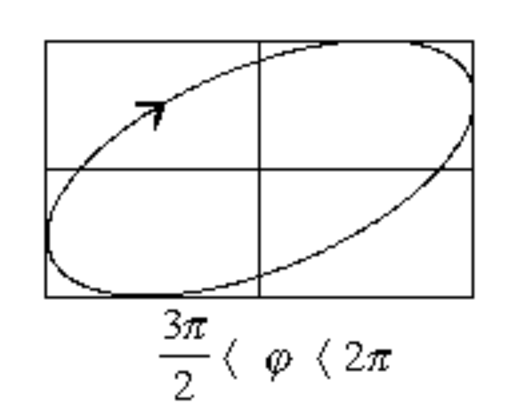
$\varphi = \pi$



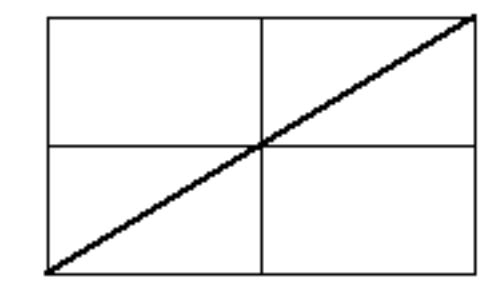
$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$



$\varphi = \frac{3\pi}{2}$



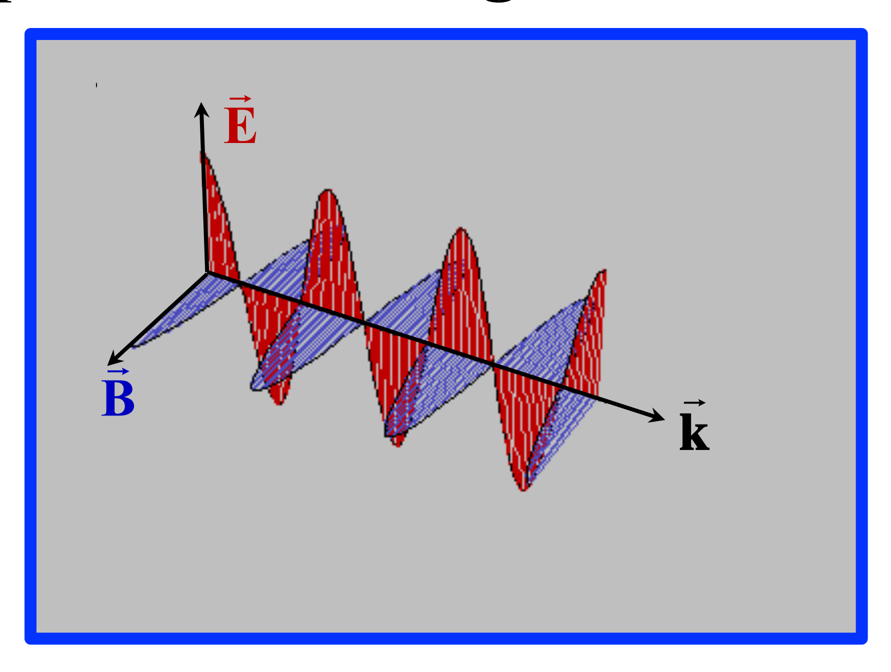
$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$

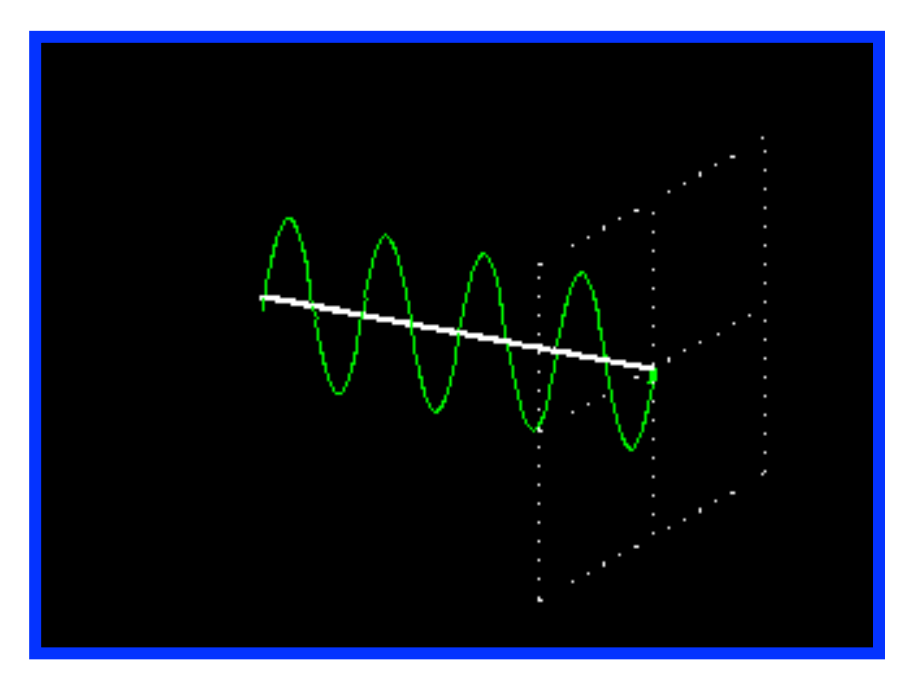


I - Le modèle vectoriel

b – Description à t donné

Autre représentation à un temps t donné d'une onde polarisée rectilignement.





Cette représentation permet de comprendre de façon intuitive la notion de polarisation.

II – Polariseur, Analyseur, lames à retard

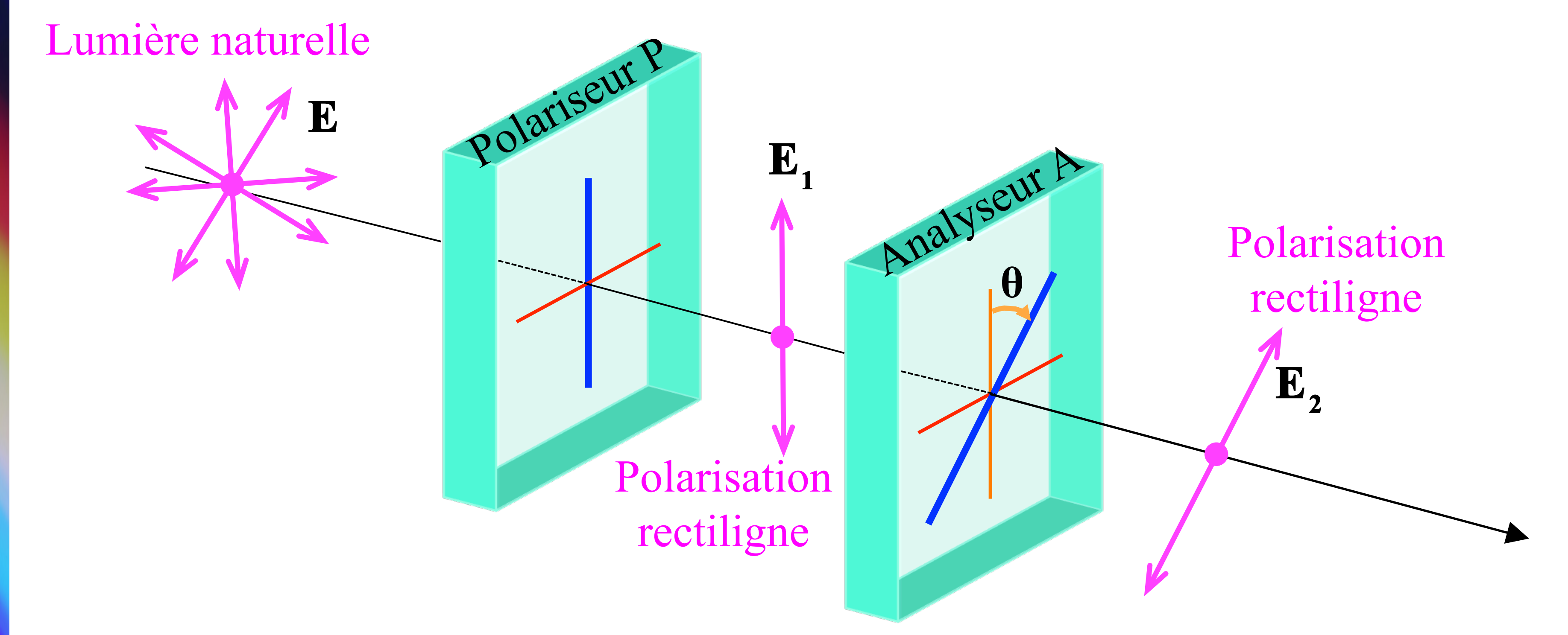
II.1 – Action du polariseur sur la lumière naturelle

Le polariseur est un système optique qui permet de transformer un faisceau parallèle de lumière naturelle en un faisceau parallèle de lumière polarisée rectilignement.

Généralement, les polariseurs sont des lames "polaroid" ne laissant passer, du champ incident, que la composante parallèle à une certaine direction de la lame "*direction de polarisation*".
La composante du champ perpendiculaire à la direction de polarisation est totalement absorbée.

II – Polariseur, Analyseur, lames à retard

II.2 – Analyseur, loi de Malus



Si le champ ayant traversé P a pour amplitude E_1, le champ traversant A est, à un facteur près, la projection de $\vec{E}_1$ sur la direction de polarisation de A :

$$E_2 = tE_1 \cos\theta$$

t : facteur de transmission de l'analyseur A.

II – Polariseur, Analyseur, lames à retard

L' intensité lumineuse qui sort de A est :

$$I_2 = t^2 I_1 \cos^2\theta = I_o \cos^2\theta$$

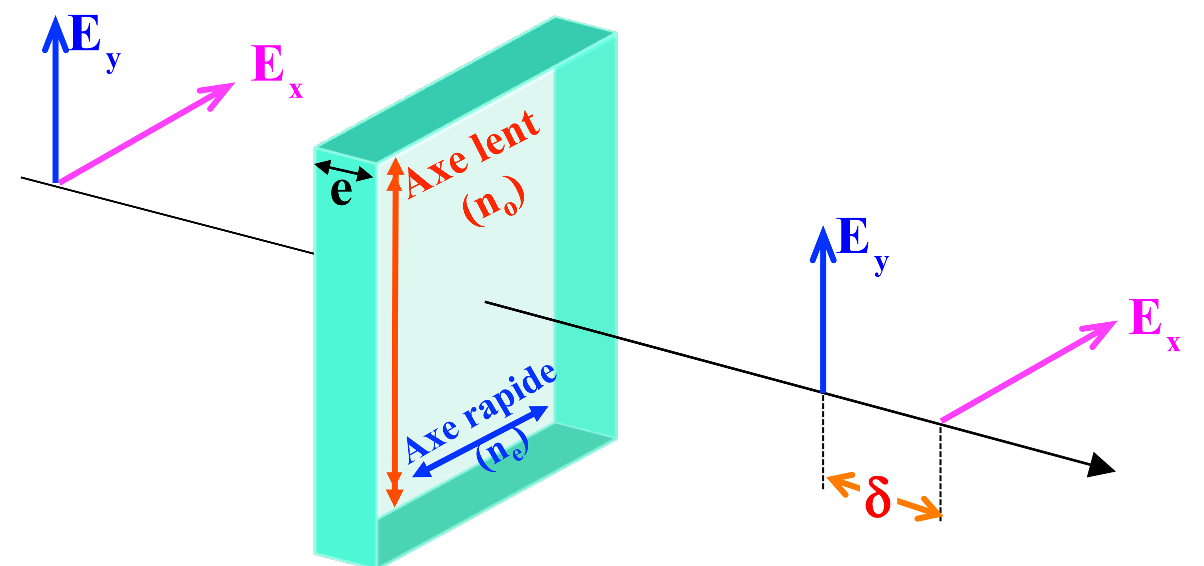
Si I_o est la valeur de I_2 pour $\theta = 0$.

$$I_2 = I_o \cos^2\theta$$

Loi de *Malus*

II.3 – Lames à retard

Se sont des lames minces taillées dans un cristal ayant des propriétés optiques anisotropes, agissant sur l'état de polarisation d'une onde.



Pour une lumière polarisée rectilignement qui traverse la lame d'épaisseur e, la composante de la vibration incidente suivant l'axe lent subit un retard de phase par rapport à la composante suivant l'axe rapide.

II – Polariseur, Analyseur, lames à retard

Ceux deux ondes de même fréquence polarisées suivant les axes lent et rapide, subissent le déphasage :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o}\delta \quad \text{avec} \quad \delta = (n_e - n_o)e$$

où n_o : indice ordinaire

n_e : indice extraordinaire

e : l'épaisseur de la lame.

- **si** $|\delta| = \frac{\lambda_o}{4} \Rightarrow |\varphi| = \frac{\pi}{2}$ **la lame est dite *quart-d'onde* ou lame λ/4.**

- **si** $|\delta| = \frac{\lambda_o}{2} \Rightarrow |\varphi| = \pi$ **la lame est dite *demi-d'onde* ou lame λ/2.**

Action d'une lame à retard

Soit une onde incidente polarisée rectilignement.

A la traversée de la lame :

$$\begin{cases} E_x = E_i \cos(\alpha)\cos(kz - \omega t) \\ E_y = E_i \sin(\alpha)\cos(kz - \omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{avec } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o}\delta$$

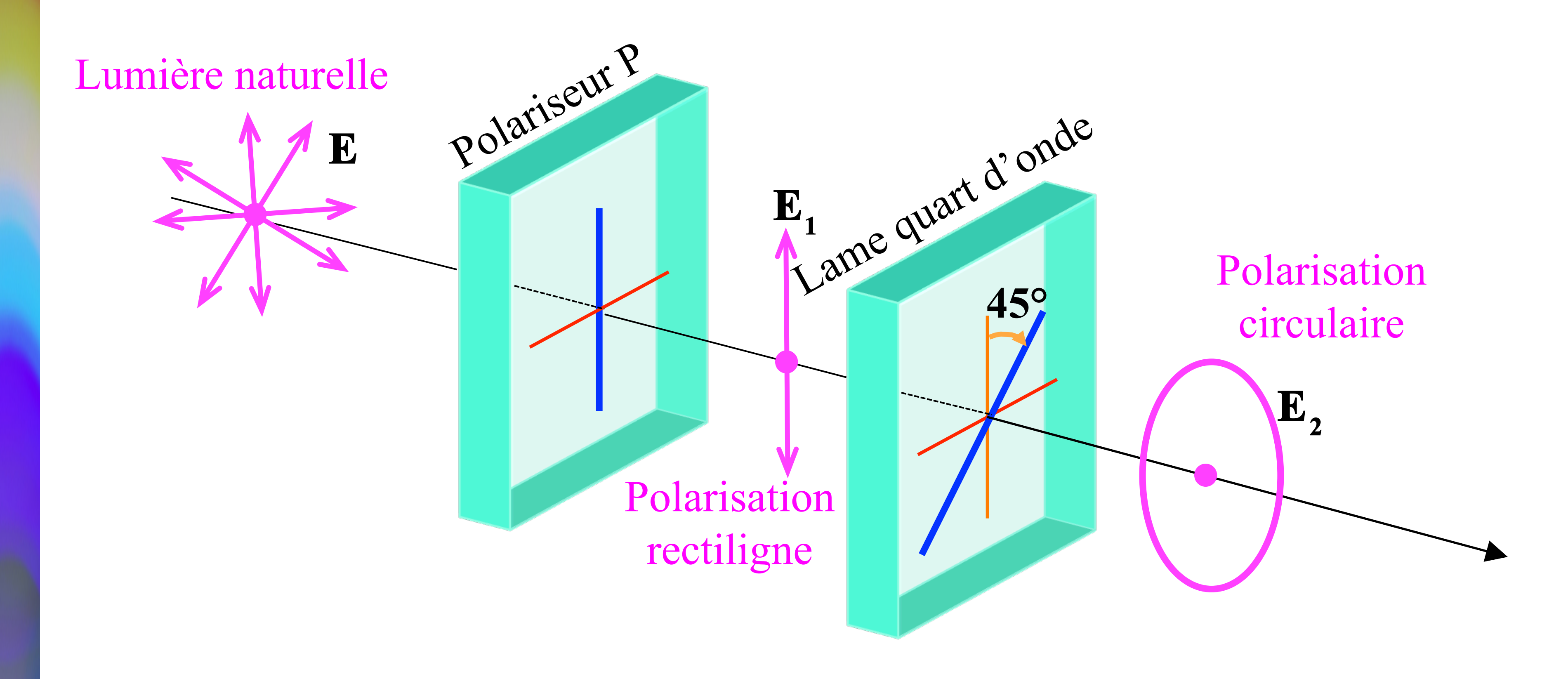
On remarque que pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/2$ la polarisation reste rectiligne quel que soit φ.

On obtient, à partir d'une onde incidente rectiligne, une lumière polarisée elliptiquement, les axes de l'ellipse correspondent aux lignes neutres de la lame.

II – Polariseur, Analyseur, lames à retard

Lorsque $\varphi = \pi/2$ et $\alpha = \pi/4$, la lumière transmise est polarisée circulairement (gauche).

Pour $\varphi = -\pi/2$ et $\alpha = \pi/4$, la lumière transmise est circulaire (droite).



Exercice 1

De la lumière naturelle d'intensité $\mathbf{I_o}$ traverse quatre polariseurs rectilignes. Le plan du polariseur **m** fait un angle de **30°** avec le plan du polariseur **(m-1)**.

1. Quelle est l'intensité du faisceau transmis ?

2. Même question si on enlève les **2** polariseurs du milieu ?

Corrigé

A chaque instant $I(t) = I_o\cos^2\theta(t)$ sur une direction donnée; donc en moyenne $I = \langle I(t) \rangle = I_o/2$.

1.
$I_1 = I_o/2$,
$I_2 = I_1 \times \cos^2\theta$,
$I_3 = I_2 \times \cos^2\theta$,
$I_4 = I_3 \times \cos^2\theta = (I_o \times \cos^6\theta)/2 = 0{,}21 \times I_o$

2. On enlève deux polariseurs du milieu, soit :

$$I_4 = I_1 \times \cos^2 3\theta = (I_o \times \cos^2 3\theta)/2 = 0$$

Exercice 2

Un faisceau lumineux de pulsation **ω** et de longueur d'onde **λ** dans le vide se propageant suivant **Oz** est décrit par :

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = E_0 \sin(\omega t - kz)$$
$$E_z = 0$$

avec : $k = \omega / c = 2\pi / \lambda$

1. Montrer qu'il s'agit d'une vibration circulaire dont on précisera le sens de parcours.

2. Un analyseur est placé dans le plan dans le plan $z = 0$; sa direction de polarisation fait un angle **θ** avec **Ox**.

Déterminer le champ **E** à la sortie de l'analyseur.

Comment l'intensité lumineuse **I** après l'analyseur varie-elle en fonction de **θ** ?

3. Reprendre les questions précédentes pour le champ incident :

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = - E_0 \sin(\omega t - kz)$$
$$E_z = 0$$

Corrigé

1. Décrivons le champ dans le plan z = 0 :

$$E_x = E_o \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad E_y = E_o \sin(\omega t)$$

Le champ $\vec{E}$ décrit un cercle paramétré par t.
En éliminant le temps t :

$$(E_x / E_o)^2 + (E_y / E_o)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

C'est bien l'équation d'un cercle.
En suivant par continuité le champ E à partir de t = 0, on note que la polarisation est gauche (sens inverse des aiguilles d'une montre).

2. Le champ transmis est (dans le plan z = 0) : $\vec{E}_t = \tau(\vec{E}_i.\vec{u})\vec{u}$

$\vec{E}_t$ est le champ transmis ;

$\vec{E}_i$ est le champ incident

τ est le facteur de transmission compris entre 0 et 1.

Dans le plan z = 0 : $\vec{E}_t = \tau E_o\left[\cos\theta.\cos(\omega t) + \sin\theta.\sin(\omega t)\right]\vec{u}$

Ou encore en notation complexe :

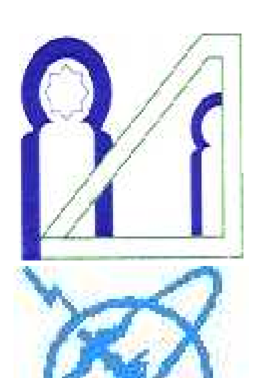
$$\vec{E}_t = A\vec{u} \qquad \text{avec} \quad A = \tau E_o \exp(i\omega t)\left[\cos\theta - i\sin\theta\right]$$

L'intensité s'écrit alors : I = A.A*

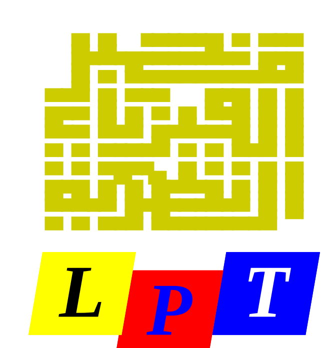
$$I = \tau^2 E_o^2$$ Indépendante de l'angle θ.

Chapitre III

Diffraction de Fraunhofer



H. EL RHALEB
Université Mohammed V, Rabat, Agdal
Faculté des Sciences,
Département de Physique,
Laboratoire de Physique Théorique
Equipe Photonique
elrhaleb@fsr.ac.ma

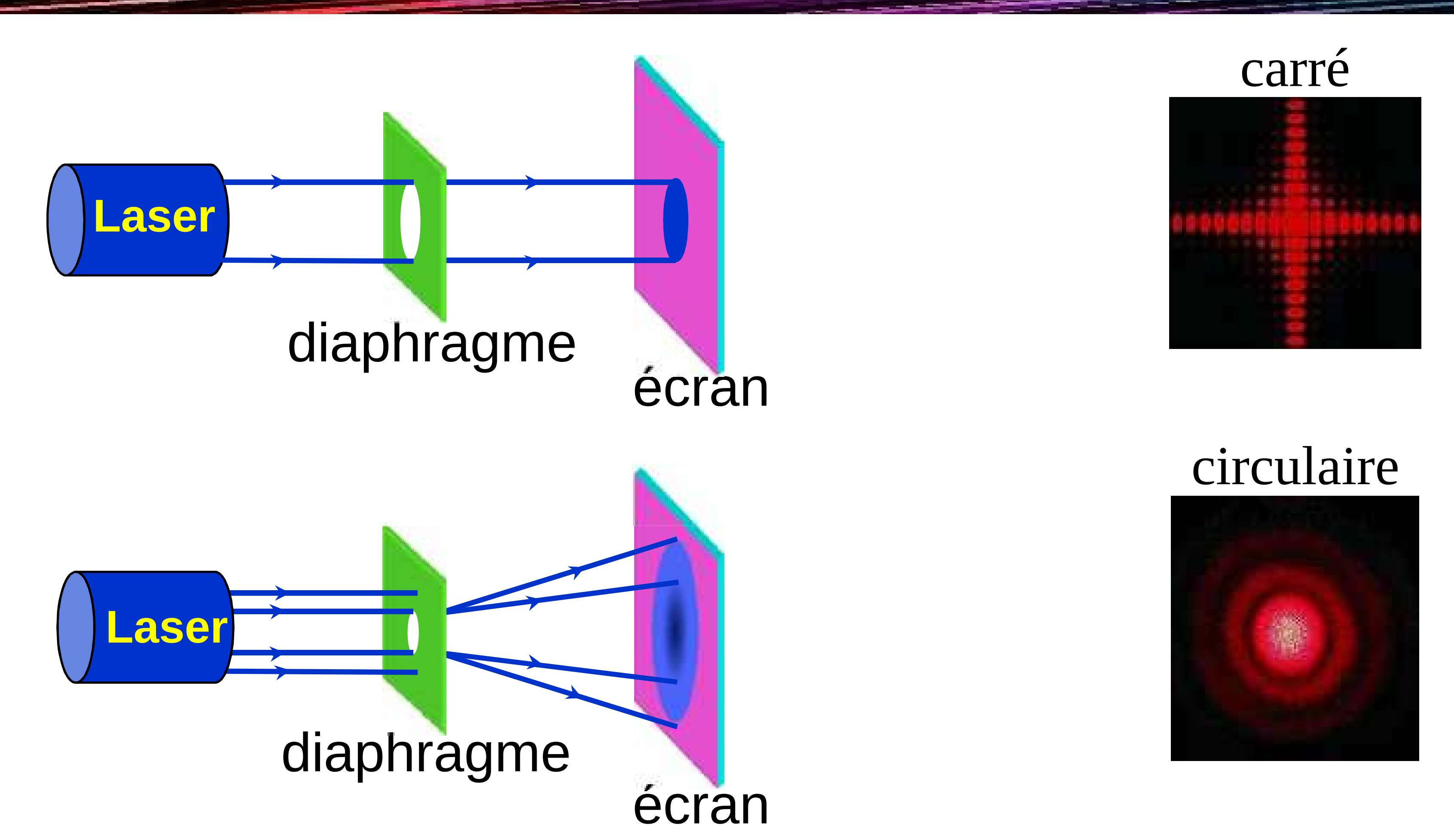




"Toute déviation des rayons lumineux de leur trajet rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion ni par une réfraction est due à la *diffraction*"

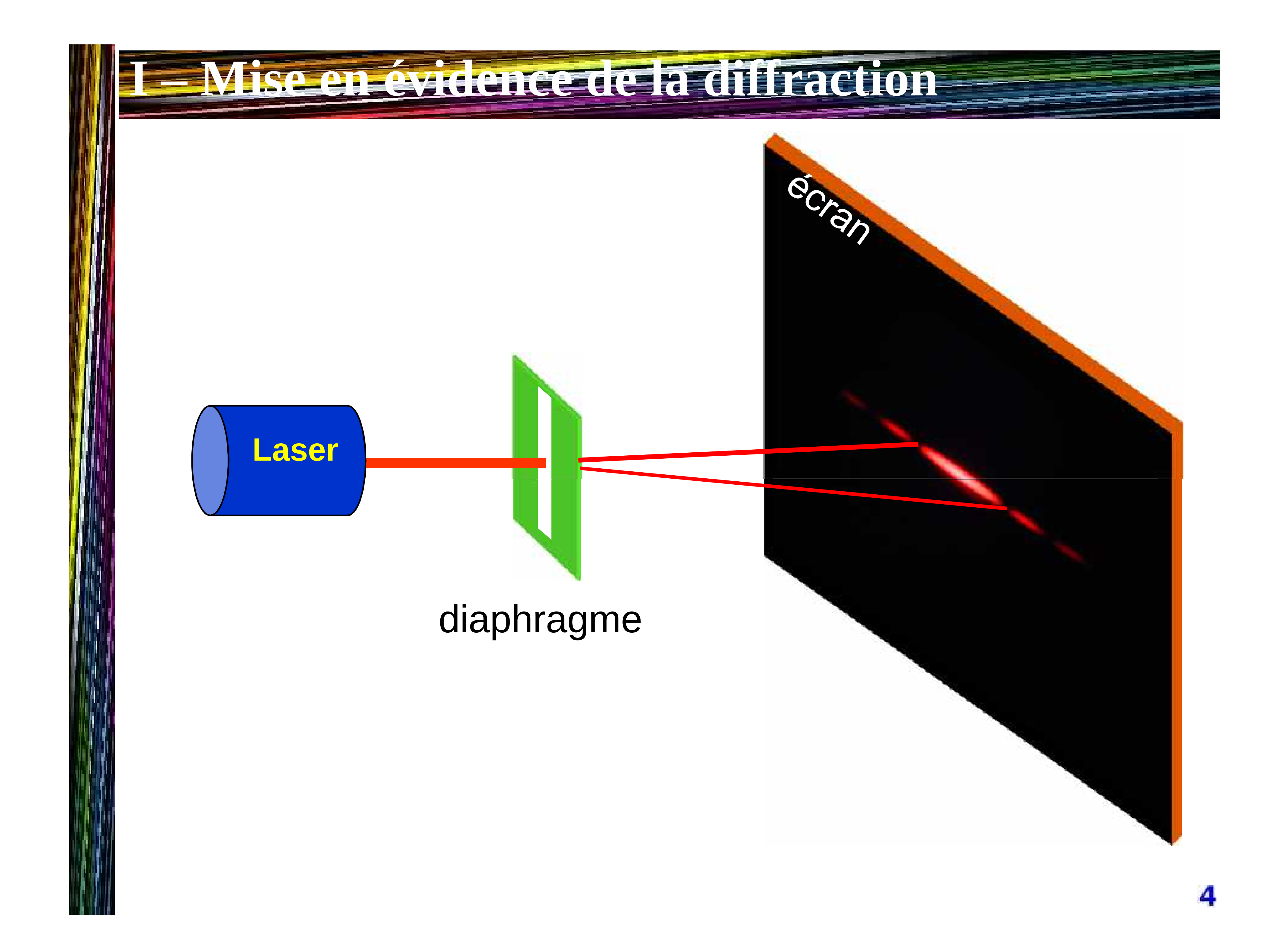
L'étude de la diffraction, dans le cas général, est complexe, un certain nombre d'approximations s'imposent alors.

I – Mise en évidence de la diffraction



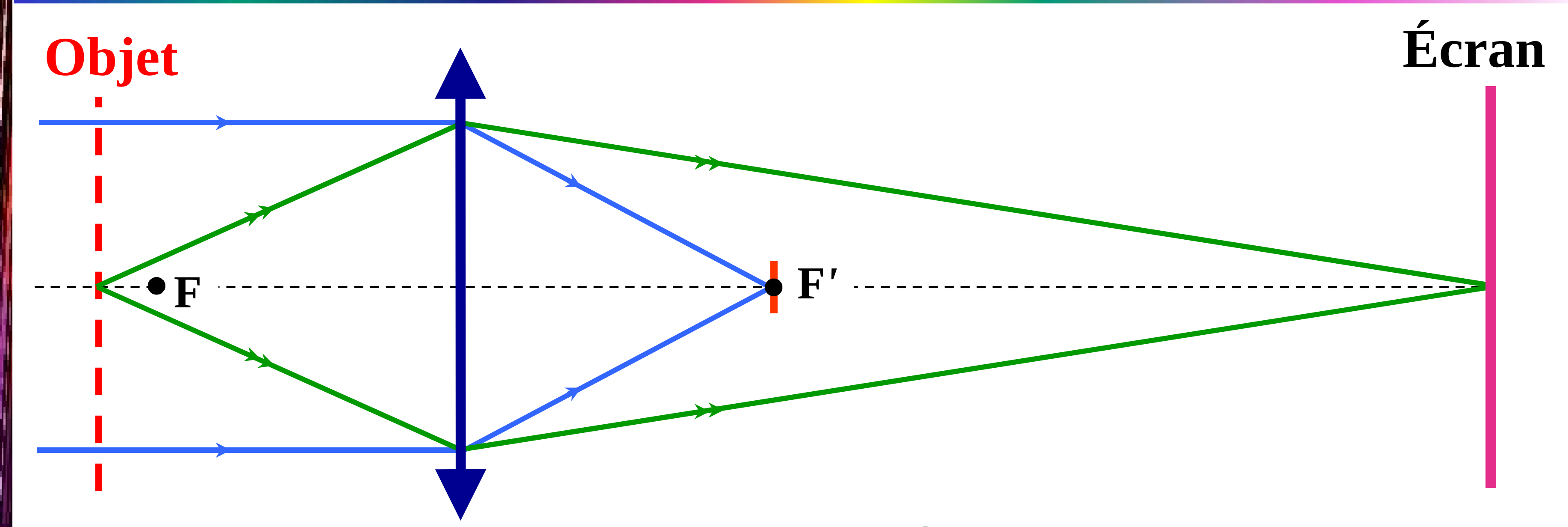
Lorsque les dimensions des obstacles sont de l'ordre de la longueur d'onde, il convient d'utiliser le modèle ondulatoire.

I – Mise en évidence de la diffraction



I – Mise en évidence de la diffraction

I.1 – Phénomène de strioscopie

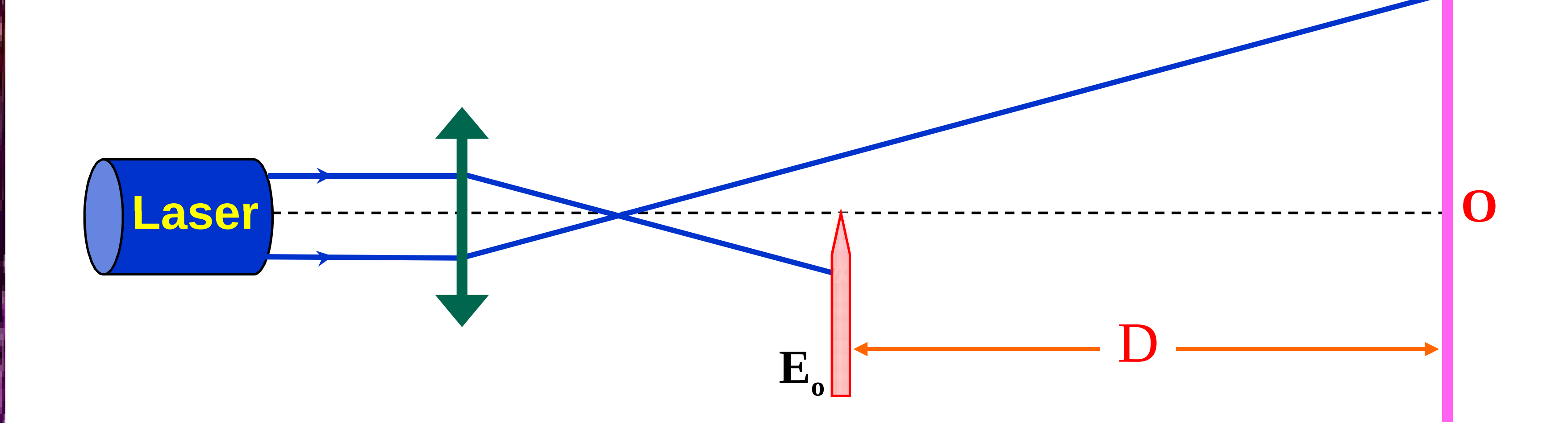


En plaçant un cache au point focal image F', aucune lumière n'apparaît sur l'écran. En plaçant sur le faisceau parallèle un objet (structure très fine), on observe sur l'écran l'image de cet objet.

On peut interpréter cette expérience en supposant que l'objet éclairé se comporte comme une "*source lumineuse*" et diffracte la lumière sans passer par F'.

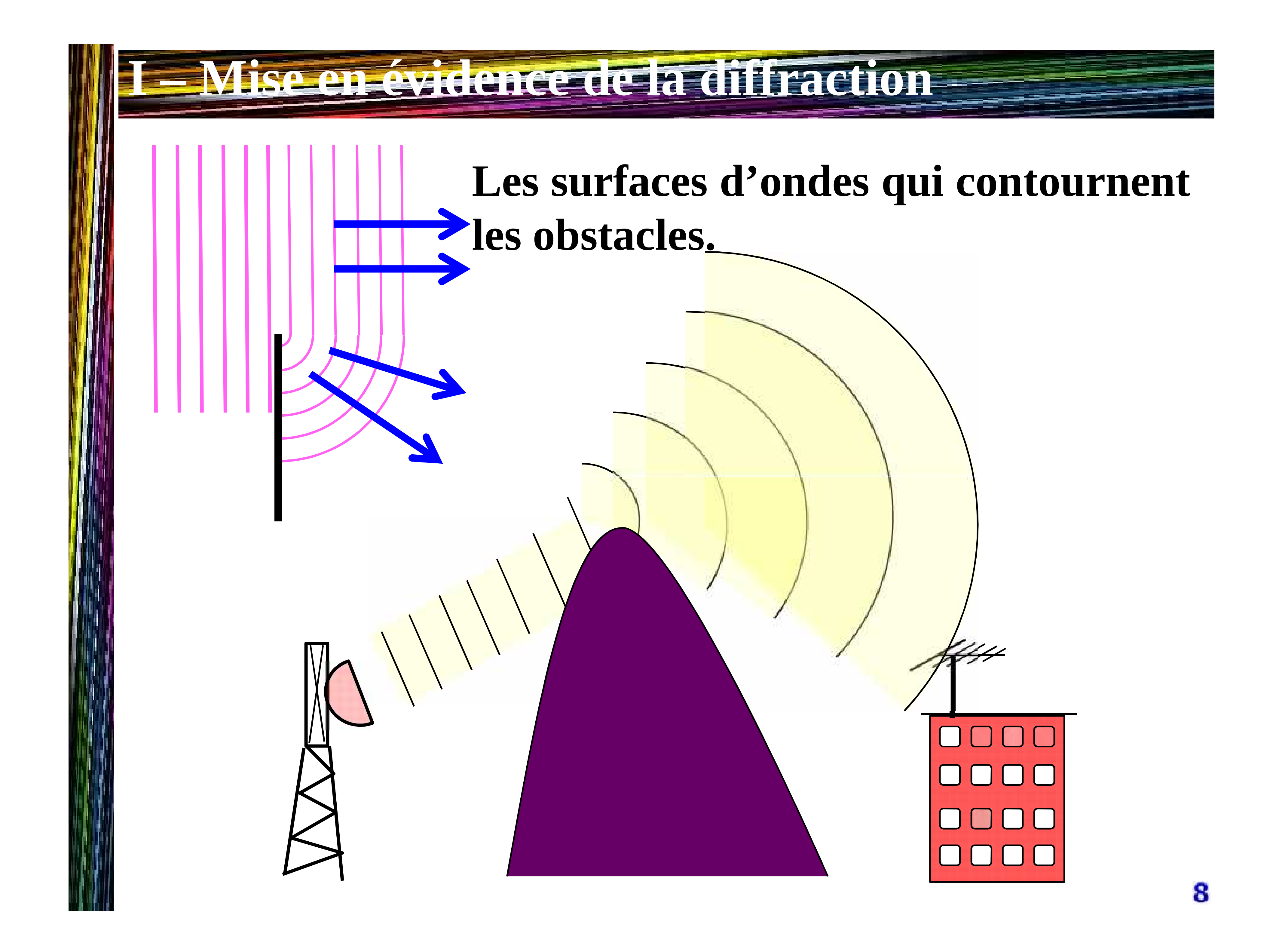
I.2 – Diffraction par le bord d'un écran

Un faisceau laser éclaire un écran. On interpose sur ce faisceau un écran opaque E_o à bord rectiligne.

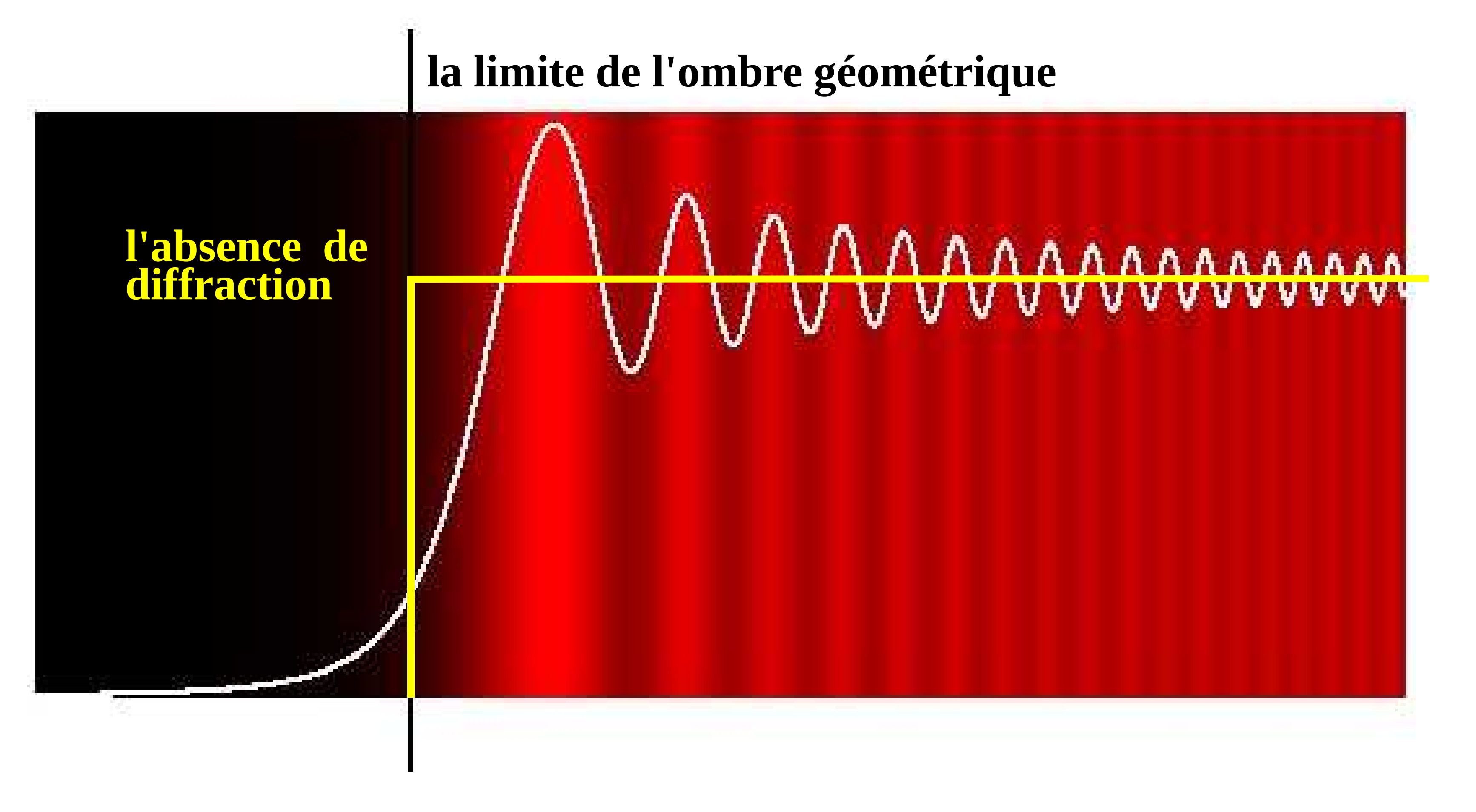


Expérimentalement, au lieu de passer de l'ombre à la pleine lumière, on observe autour de O des franges correspondant à la répartition d'intensité lumineuse indiqué sur la figure.

I – Mise en évidence de la diffraction



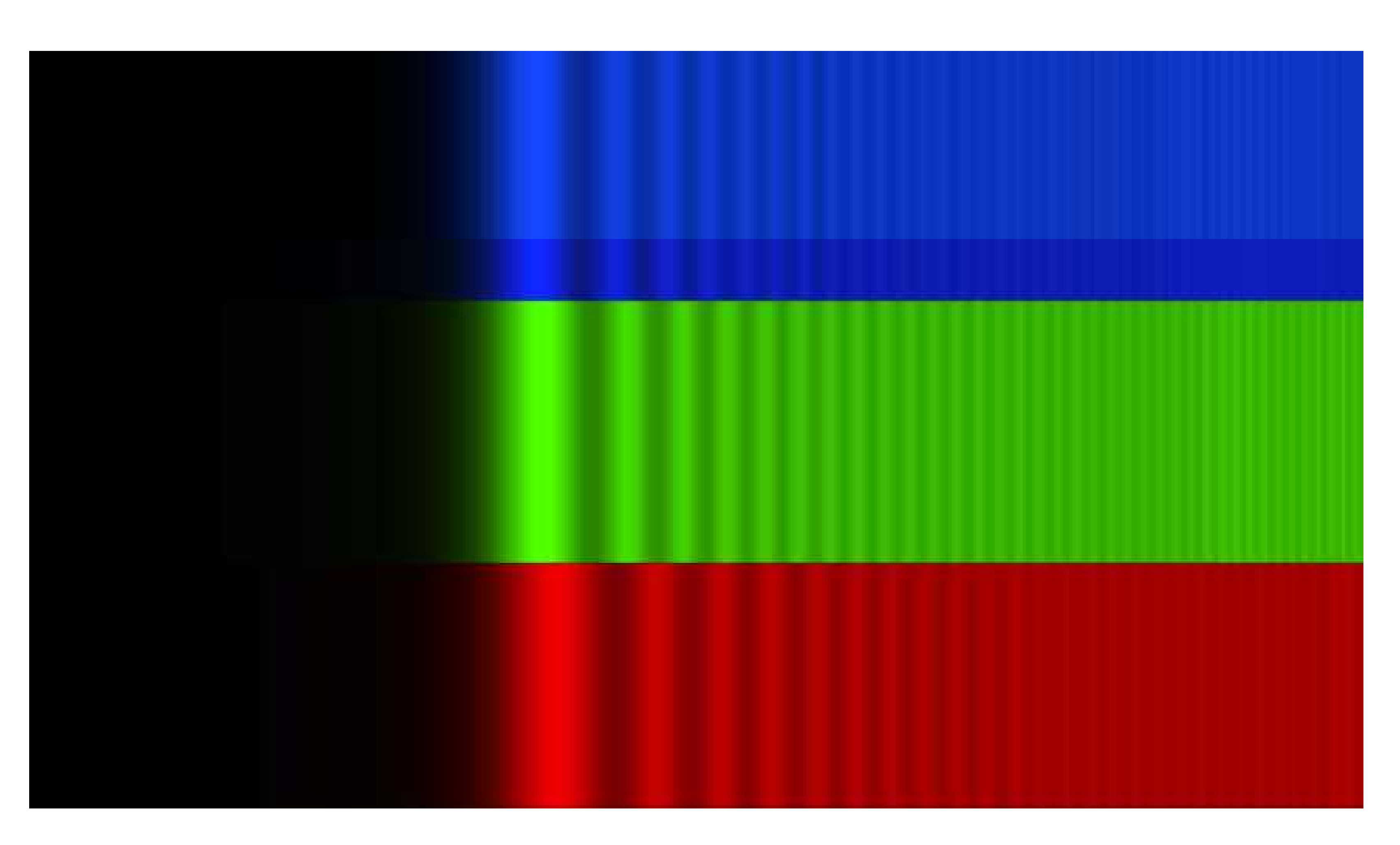
I – Mise en évidence de la diffraction



La courbe représente l'intensité de la lumière diffractée par un bord d'écran.

I – Mise en évidence de la diffraction

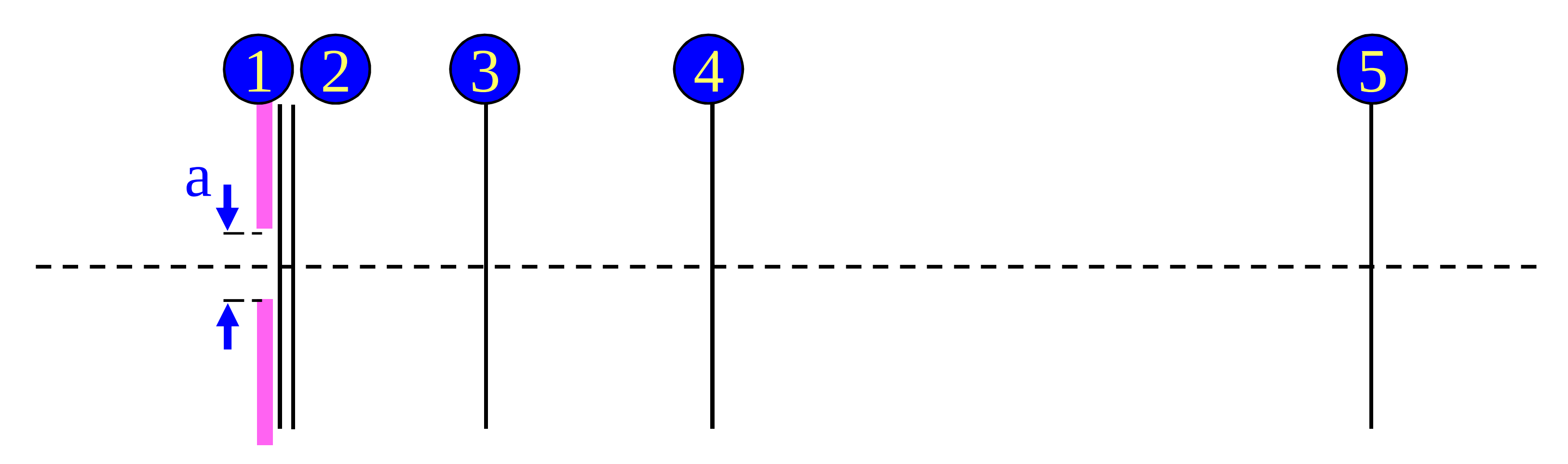
La largeur de la première oscillation est de l'ordre de $\sqrt{(\lambda D)}$, est les autres oscillations sont plus rapides et moins marquées.



I.3 – Diffraction suivant l'emplacement

Considérons une fente de largeur **a** éclairé par une source ponctuelle monochromatique placée à l'infini.

Après la fente, on observe la répartition de l'éclairement aux différents emplacements **1**, **2**, .., **5**.

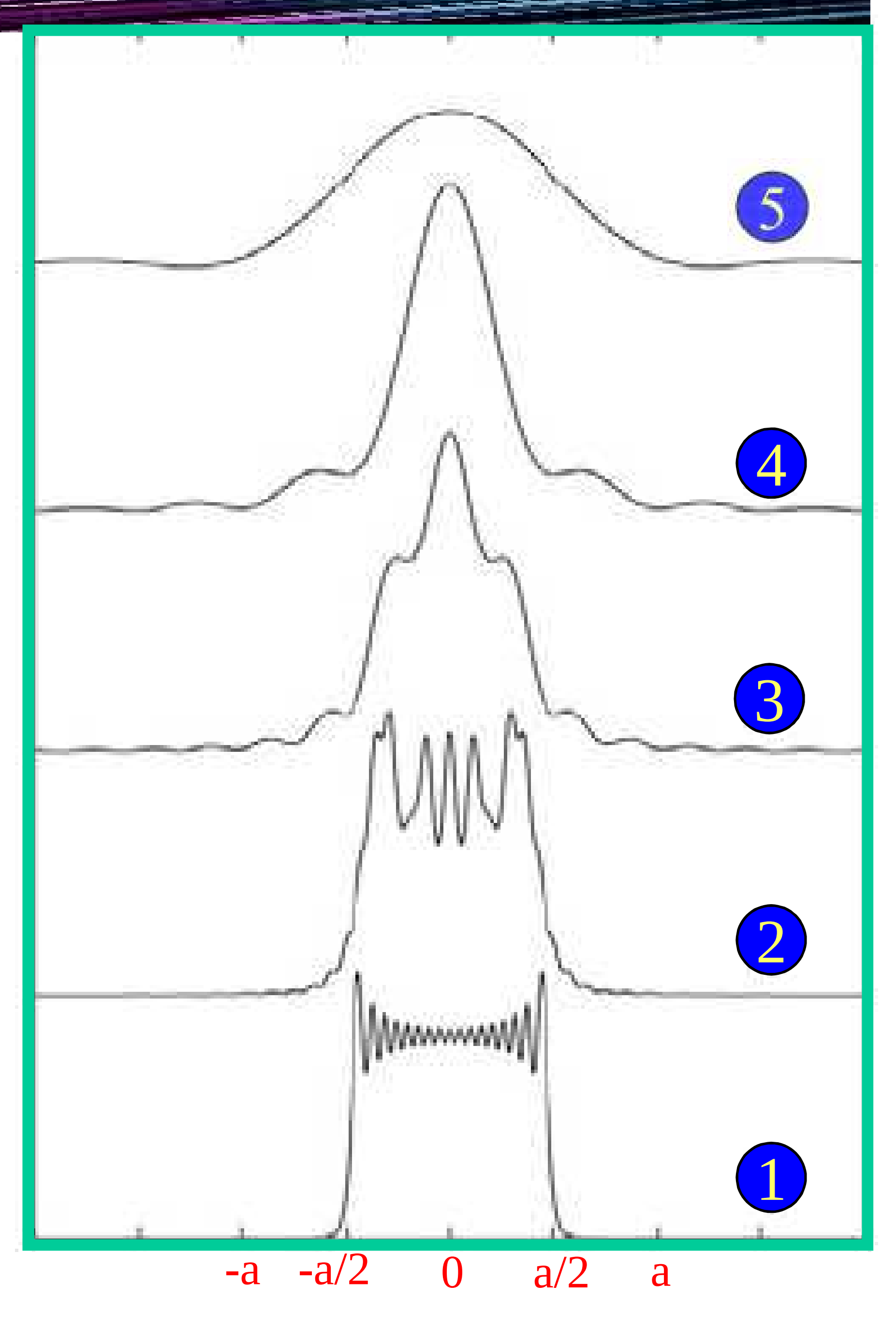


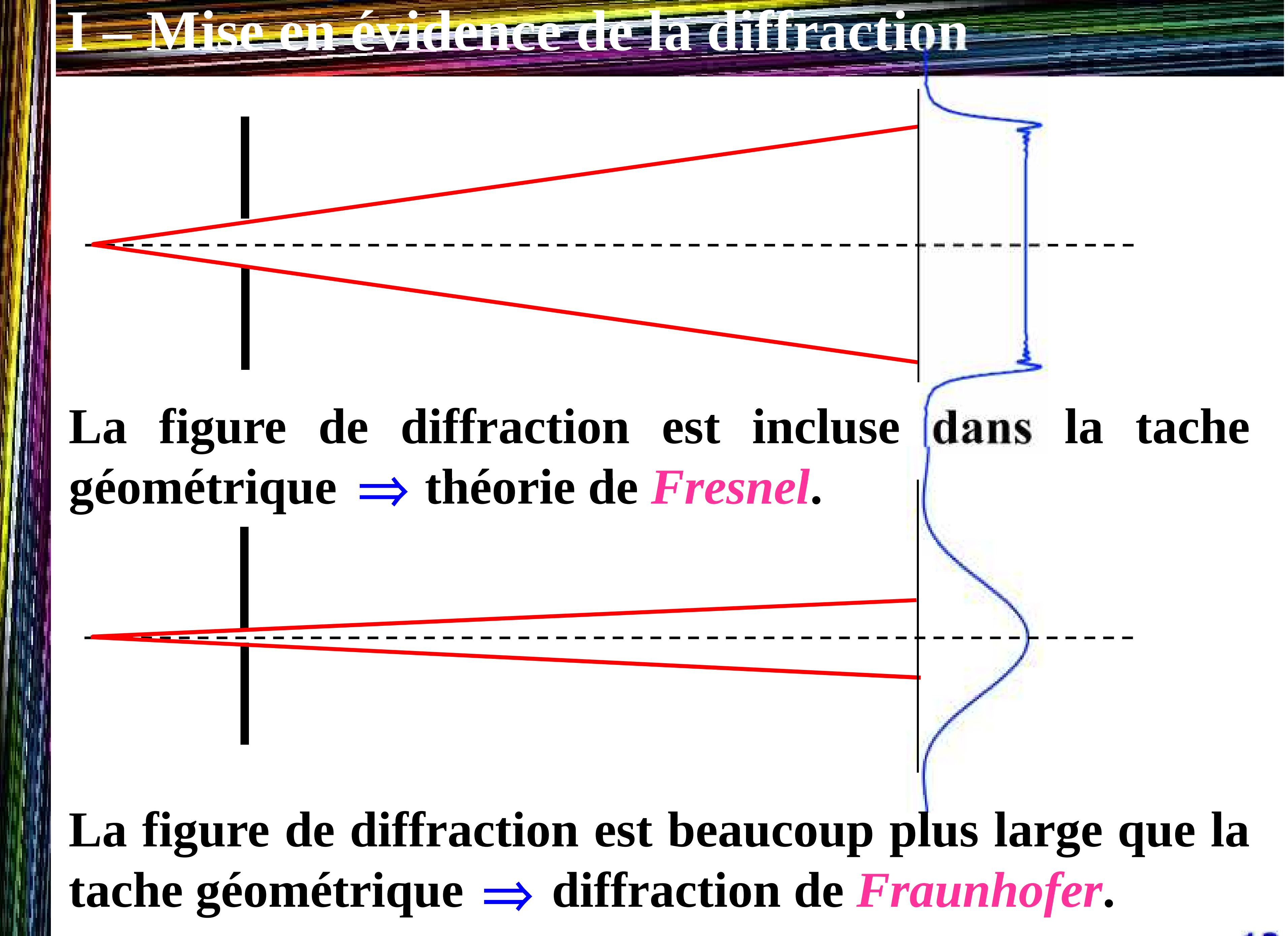
On observe juste après la fente l'image projetée de celle-ci avec des oscillations (franges) de période proche de λ. C'est la diffraction de *Fresnel*.

I – Mise en évidence de la diffraction

En s'éloignant, la taille des franges croît.

En ⑤ , la figure de diffraction ne ressemble plus à la fente, nous sommes dans la situation de *Fraunhofer*.





La figure de diffraction est incluse dans la tache géométrique ⇒ théorie de *Fresnel*.

La figure de diffraction est beaucoup plus large que la tache géométrique ⇒ diffraction de *Fraunhofer*.

I.4 – Problématique

Pratiquement, le problème de la diffraction est le suivant : ***Comment déterminer la répartition d'intensité lumineuse après traversée de la pupille, connaissant la répartition d'amplitude au niveau de la pupille et la forme de celle-ci ?***

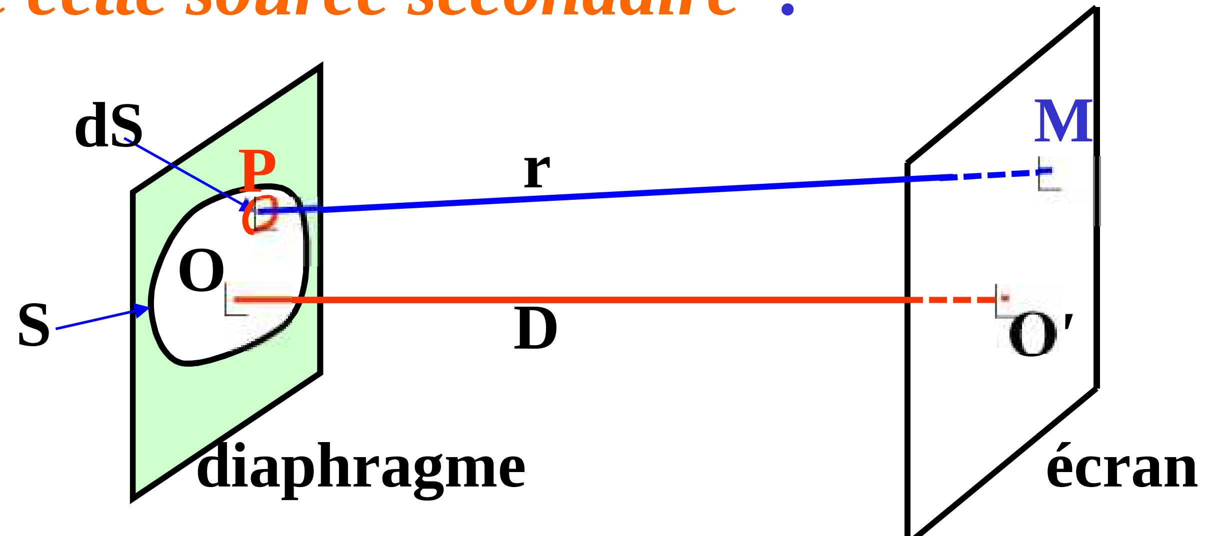
En principe il faut résoudre les équations de *Maxwell* avec les conditions aux limites pour différentes polarisations.

En fait ce problème est quasi-insoluble analytiquement et souvent difficile numériquement. Pour simplifier le problème on utilise un champ scalaire avec des conditions aux limites triviales.

II – Principe de Huyghens-Fresnel

Fresnel **a précisé le principe de** *Huyghens* **de la manière suivante :**

"L'amplitude de la vibration lumineuse en un point M est la somme des amplitudes produites par toutes les sources secondaires. L'état vibratoire d'une source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente et à l'élément de surface dS entourant le point P où est située cette source secondaire".



II – Principe de Huyghens-Fresnel

Soit $A_e(P)$ l'amplitude de l'onde émergente au point P de l'ouverture de surface S :

$$A_e(P) = A_P \exp(i\omega t)$$

D'après le principe de *Huyghens-Fresnel*, le point P émet une ondelette sphérique.

L'amplitude au point M de l'écran est de la forme :

$$dA(M) = K'.A_e(P)\frac{\exp(ikr)}{r}dS$$

K' est un facteur de proportionnalité.

Pour tout les points P de l'ouverture, au point M, nous devons effectuer la somme de toutes les contributions élémentaires :

$$A(M) = \iint_S K'.A_e(P)\frac{\exp(ikr)}{r}dS$$

II – Principe de Huyghens-Fresnel

Additionner ces amplitudes est une conséquence de la linéarité des équations de *Maxwell*. On dit que les vibrations interfèrent pour donner en M une vibration résultante.

On montre que le facteur K' est quasiment une constante et que la variable r du dénominateur peut être confondue avec D.

La formulation pratique du principe de *Huyghens-Fresnel* est donc :

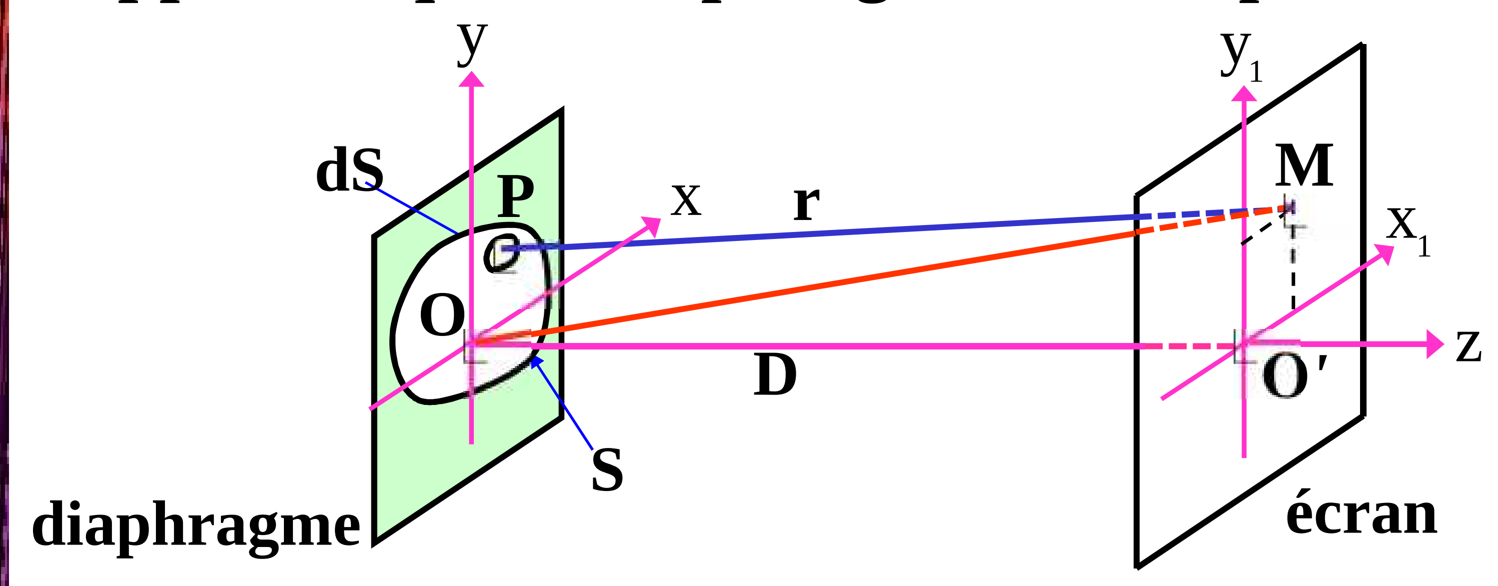
$$A(M) = K' \iint_S A_e(P).\exp(ikr)\,dS$$

avec $K = K'/D = cte$

III – Les approximations

III.1 – Expression de A(M)

Supposons que le diaphragme soit un plan.



Le point P, a pour coordonnées (x,y).

Le point M, a pour coordonnées (x_1,y_1).

On pose $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$ **et** $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

donc $\vec{r} = \vec{R} - \vec{\rho}$

III – Les approximations

Par suite $$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\vec{R}.\vec{\rho}$$

Si on suppose que ρ << R on peut écrire :

$$r = R\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2} - 2\frac{\vec{R}.\vec{\rho}}{R^2}} \simeq R + \frac{\rho^2}{2R} - \frac{\vec{R}.\vec{\rho}}{R}$$

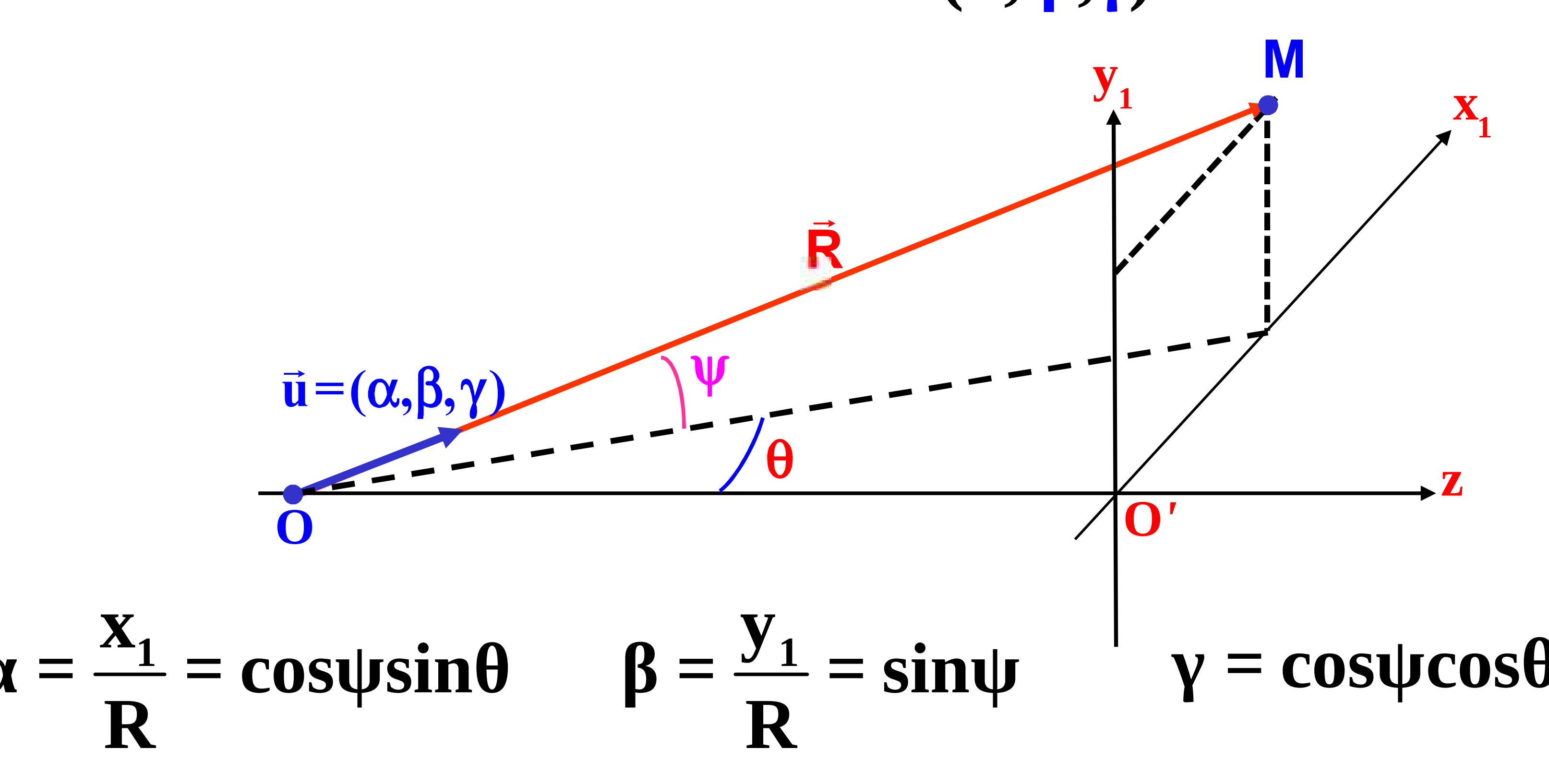
En utilisant les coordonnées de R et ρ, on déduit :

$$r \approx R + \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{x_1 x + y_1 y}{R}$$

L'amplitude au point M s'écrit donc (1) :

$$A(M) = Ke^{ikR} \iint_S A_e(P) \exp\left[\frac{-ik(x_1 x + y_1 y)}{R}\right] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] dS$$

On introduit les sinus directeur (α, β,γ) :



$$\alpha = \frac{x_1}{R} = \cos\psi\sin\theta \qquad \beta = \frac{y_1}{R} = \sin\psi \qquad \gamma = \cos\psi\cos\theta$$

L'expression précédente s'écrit (2) :

$$A(M) \approx Ke^{ikR}\iint_S A_e(P)\exp\left[-ik(\alpha x + \beta y)\right]\exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2R}\right]dS$$

III.2 – Approximation de Fresnel et Fraunhofer

L'expression (2) est l'approximation fondamentale de la diffraction dans l'approximation de *Fresnel*.

Dans certaines conditions on simplifie parfois cette expression en écrivant :

Lorsque $\frac{x^2+y^2}{R} >> (\alpha x + \beta y)$ c.à.d **R** petit.

$$A(M) \approx K.e^{ikR} \iint_S A_e(P) \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2R}\right] dS \qquad (3)$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à distance finie ou *diffraction de Fresnel* (le calcul de (3) est généralement difficile).

III – Les approximations

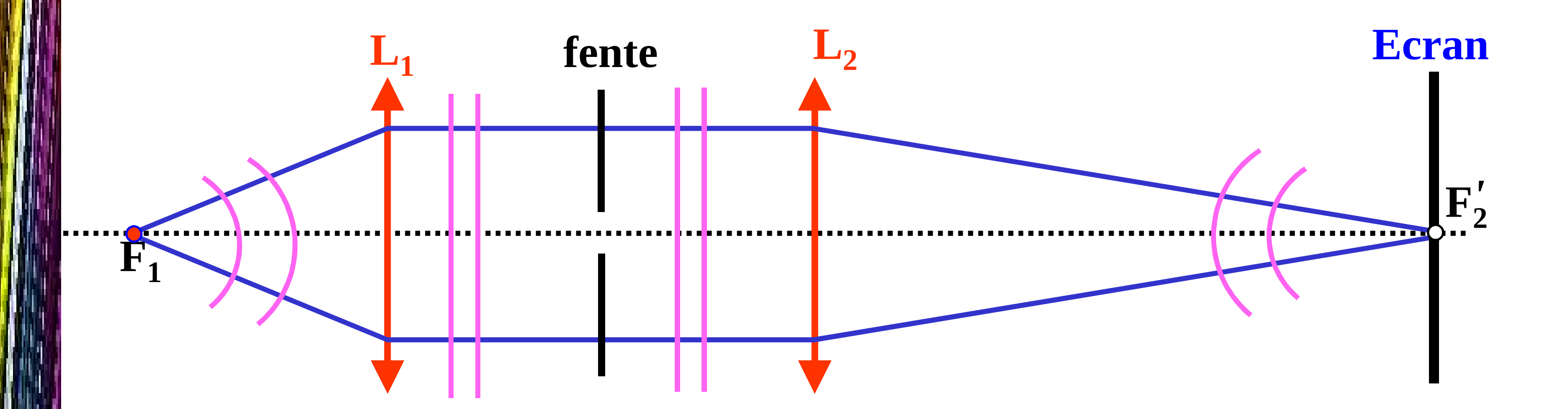
Lorsque $R \to \infty$ le terme quadratique devient négligeable devant le terme linéaire et l'expression (2) devient :

$$A(M) \simeq K.e^{ikR} \iint_S A_e(P)\exp(-ik(\alpha x + \beta y))dS$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à l'infini ou diffraction de Fraunhofer.

III – Les approximations

Dans la pratique, on réalise la diffraction à l'infini en se plaçant dans le plan focal F′ d'une lentille convergente.



On place en F_1, un objet ponctuel. L'ouverture de diffraction reçoit donc une onde plane. On observe le phénomène de diffraction à l'infini dans le plan focal image de la lentille L_2.

III.3 – Transformation de Fourier

Considérant l ’ expression de la diffraction de *Franhaufer*. L’amplitude sur le diaphragme s’écrit $A(x,y)$, alors que sur l’écran est $A(x_1,y_1)$.

Le terme de phase peut s’écrire :

$$ik(\alpha x + \beta y) = \frac{ik}{R}(x_1 x + y_1 y) = 2i\pi(ux + vy)$$

avec $u = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x_1}{\lambda R}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y_1}{\lambda R}$ fréquences spatiales

L’amplitude diffracté prend la forme :

$$A(u,v) = \iint_S A(x,y)\exp(-2i\pi(ux + vy))dxdy$$

Indépendamment de la fonction de transfert du diaphragme, $A(x,y) \neq 0$ si $(x,y) \in S$ et $A(x,y) = 0$ ailleurs.

III – Les approximations

Nous pouvons donc étendre le domaine d'intégration jusqu'à l'infini :

$$\mathbf{A(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y)\exp(-2i\pi(ux + vy))\,dx\,dy}$$

Cette équation définit une opération mathématique appelée *transformation de Fourier* :

$$\hat{A}(u, v) = \iint A(x, y)\exp(-2i\ \ (ux + vy))\,dxdy$$

On peut dire qu'à un facteur multiplicatif près, la répartition d'amplitude à l'infini d'une onde diffractée est égale à la transformée de *Fourier* de la répartition d'amplitude dans le plan de l'objet diffractant.

On se limite à la diffraction de *Fraunhofer*.

IV.1 – Diffraction par une fente

IV.1.1 – Expression de l'amplitude diffractée

Considérant une fente fine rectangulaire de largeur **a** et de longueur **b** (**a** << **b**), éclairée uniformément par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe oz.

Sachant que $A_e(P) = A_e(x,y) = T(x,y)A_i = Cte$ (éclairement uniforme), la relation suivante :

$$A(\alpha,\beta) = K\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2}\exp(-ik(\alpha x+\beta y))\,dx\,dy$$

$$= K\int_{-a/2}^{+a/2}\exp(-ik\alpha x)dx\int_{-b/2}^{+b/2}\exp(-ik\beta y)dy$$

IV – Les exemples

En utilisant la relation $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ on obtient :

$$A(\alpha,\beta) = K.ab \frac{\sin\left[\dfrac{k\alpha a}{2}\right]}{\dfrac{k\alpha a}{2}} \frac{\sin\left[\dfrac{k\beta b}{2}\right]}{\dfrac{k\beta b}{2}}$$

Ou encore

$$A(\alpha,\beta) = K.ab \frac{\sin\left[\dfrac{\pi\alpha a}{\lambda}\right]}{\dfrac{\pi\alpha a}{\lambda}} \frac{\sin\left[\dfrac{\pi\beta b}{\lambda}\right]}{\dfrac{\pi\beta b}{\lambda}}$$

puisque $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Cette expression est de la forme : $A = A_o \dfrac{\sin U}{U} \dfrac{\sin V}{V}$

IV.1.2 – Eude de la fonction sinc(U)

1/ $\frac{\sin U}{U} = 0$ pour $U = k\pi$

2/ $\frac{\sin U}{U} = 1$ pour $U = 0$

3/ $\frac{\sin U}{U}$ est maximum $(U \neq 0)$ pour $U = \tan U$

soit $U = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

et a pour valeur :

$$\left(\frac{\sin U}{U}\right)_{max} = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}$$ (avec $n \neq 0$ et -1)

IV – Les exemples

IV – Les exemples

$$\frac{\sin(U)}{U}$$

1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2

-4π -3π -2π -π 0 π 2π 3π 4π

U

$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2}$

IV.1.3 – Répartition de l'intensité dans le plan focale d'une lentille

Sachant que $\alpha = \cos\psi\sin\theta$ et $\beta = \sin\psi$ on peut écrire :

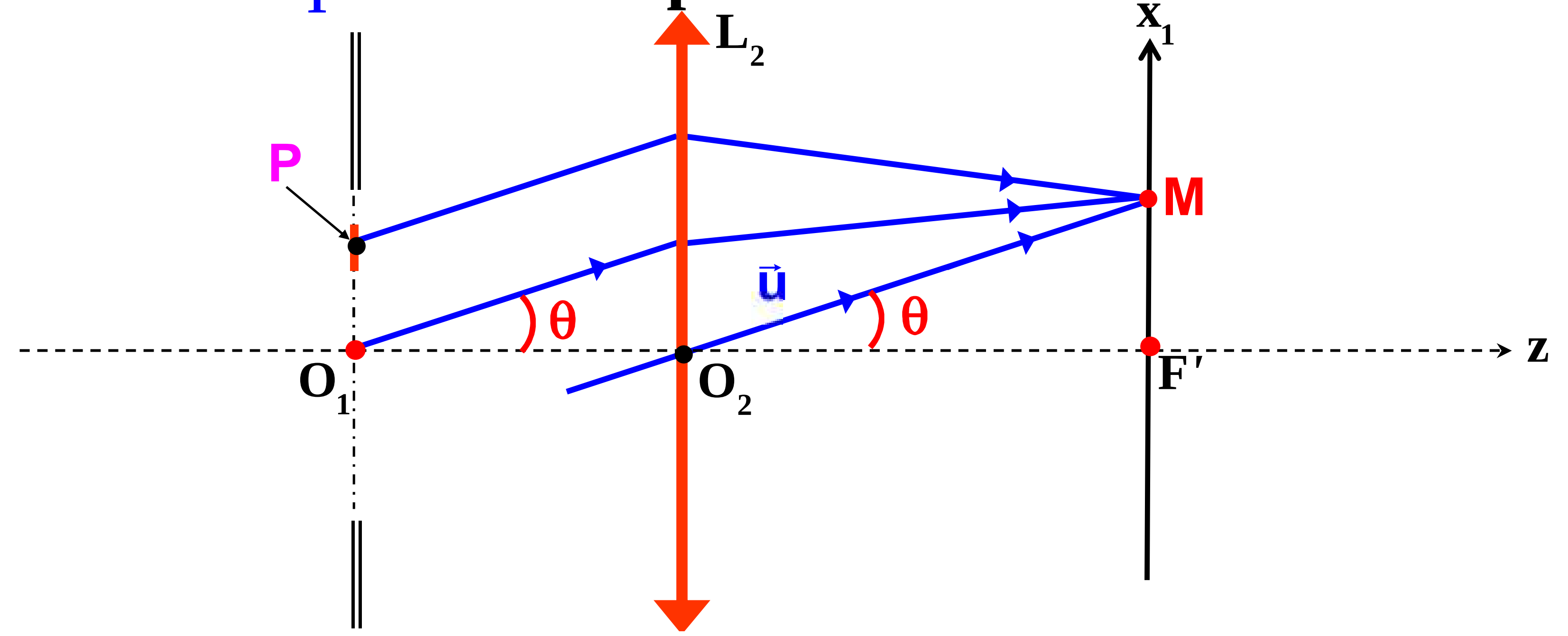
$$A(\alpha,\beta) \approx A(\psi,\theta) = C.ab\,\frac{\sin\left[\dfrac{\pi a\cos(\psi)\sin(\theta)}{\lambda}\right]}{\dfrac{\pi a\cos(\psi)\sin(\theta)}{\lambda}}\;\frac{\sin\left[\dfrac{\pi b\sin(\psi)}{\lambda}\right]}{\dfrac{\pi b\sin(\psi)}{\lambda}}$$

Si nous supposons que $\psi \approx 0$, la situation devient unidimensionnelle et on obtient : $A(\psi,\theta) \rightarrow A(\theta)$ avec :

$$A(\theta) = A_0\,\frac{\sin\left[\dfrac{\pi a\sin(\theta)}{\lambda}\right]}{\dfrac{\pi a\sin(\theta)}{\lambda}}$$

où A_o est une constante proportionnelle à la surface de la fente $S = ab$. Cette expression représente l'amplitude de l'onde diffractée par une fente fine de largeur a suivant θ.

Si nous nous plaçons dans le plan focal de la lentille de distance focale , il nous faut remplacer la variable θ par la variable x_1. Un calcul préalable est nécessaire :



La point **M** dans le plan focal a pour abscisse :

$$\overline{F'M} = x_1 = f.\tan(\theta)$$

Les angles de diffraction étant toujours "petits" (hypothèse initiales) nous pouvons écrire :

$$\sin(\theta) \sim \tan(\theta) = \frac{x_1}{f}$$

Par suite la répartition de l'amplitude à l'infini (plan focal) **$A(x_1)$** et la répartition d'intensité **$I(x_1) = AA^*$** s'écrivent :

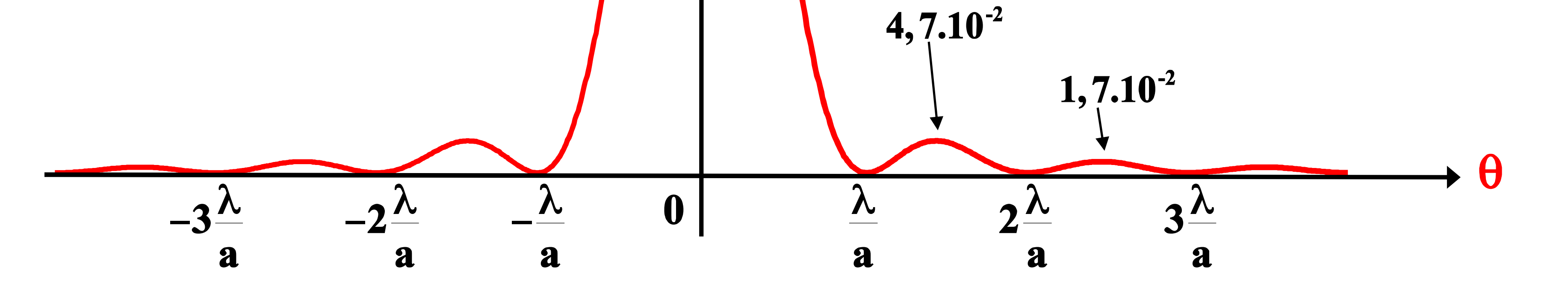
$$A(x_1) = A_0 \frac{\sin(p)}{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\pi a x_1}{\lambda f}$$

$$I(x_1) = I_0 \left[\frac{\sin(p)}{p}\right]^2 \quad \text{avec} \quad I_0 = A_0 A_0^*$$

On constate que le maximum central est très intense par rapport aux maximums secondaires.

Le rapport entre ce maximum et le premier maximum secondaire est de l'ordre de :

1/0,047 = 21.



IV.1.4 – Cas d'une ouverture rectangulaire

A partir de l'expression (5) Il est facile d'obtenir l'expression de l'intensité diffracté à l'infini par une ouverture rectangulaire :

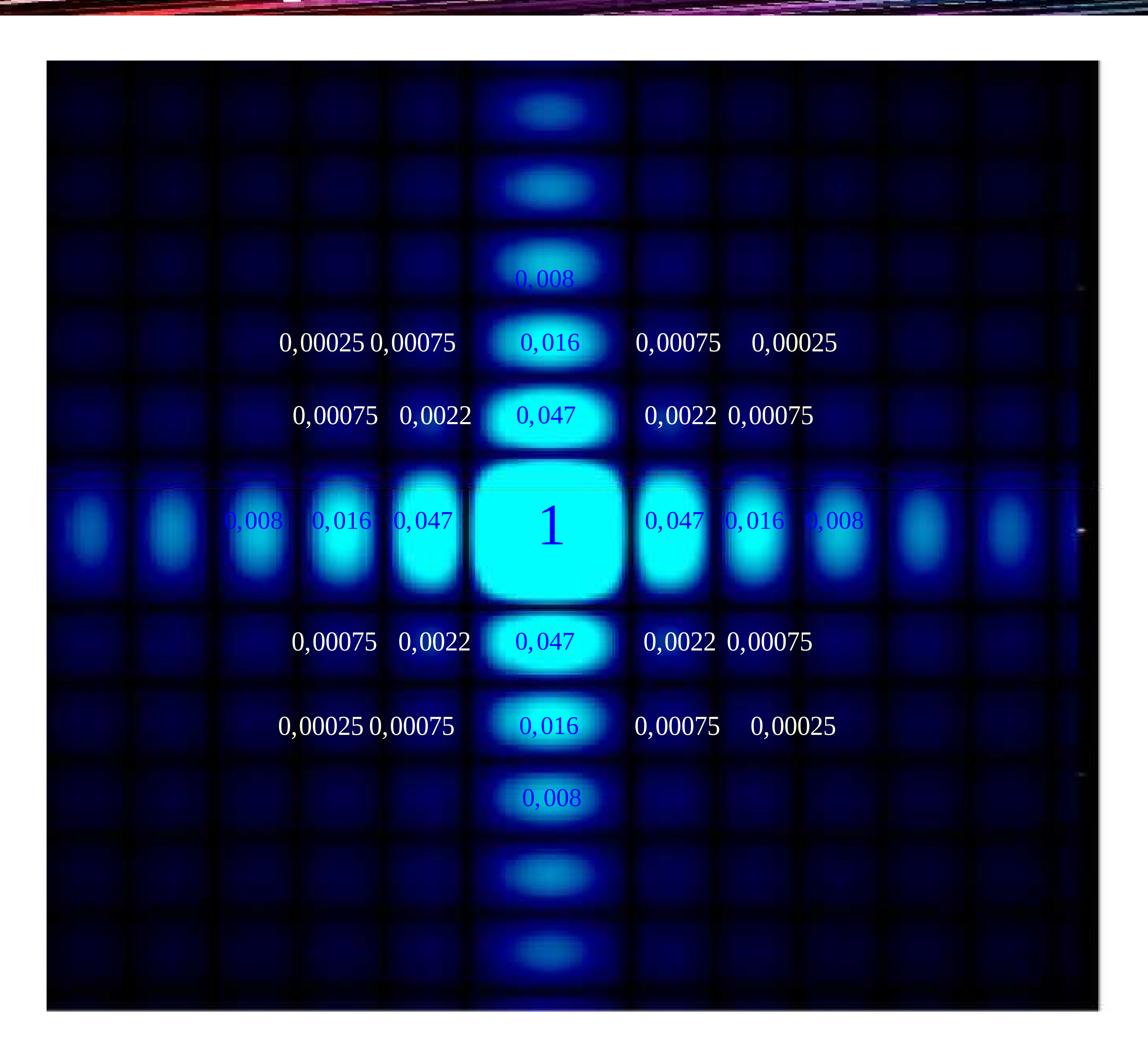
$$I(x_1, y_1) = I_0 \left[\frac{\sin p}{p}\right]^2 \left[\frac{\sin q}{q}\right]^2$$

avec $p = \dfrac{\pi a x_1}{\lambda f}$ $\quad q = \dfrac{\pi b y_1}{\lambda f}$ et $\quad I_0 = C^2.a^2b^2$

La répartition a la forme d'une croix.

La tache centrale est plus large dans la direction où la fente est plus étroite et inversement.

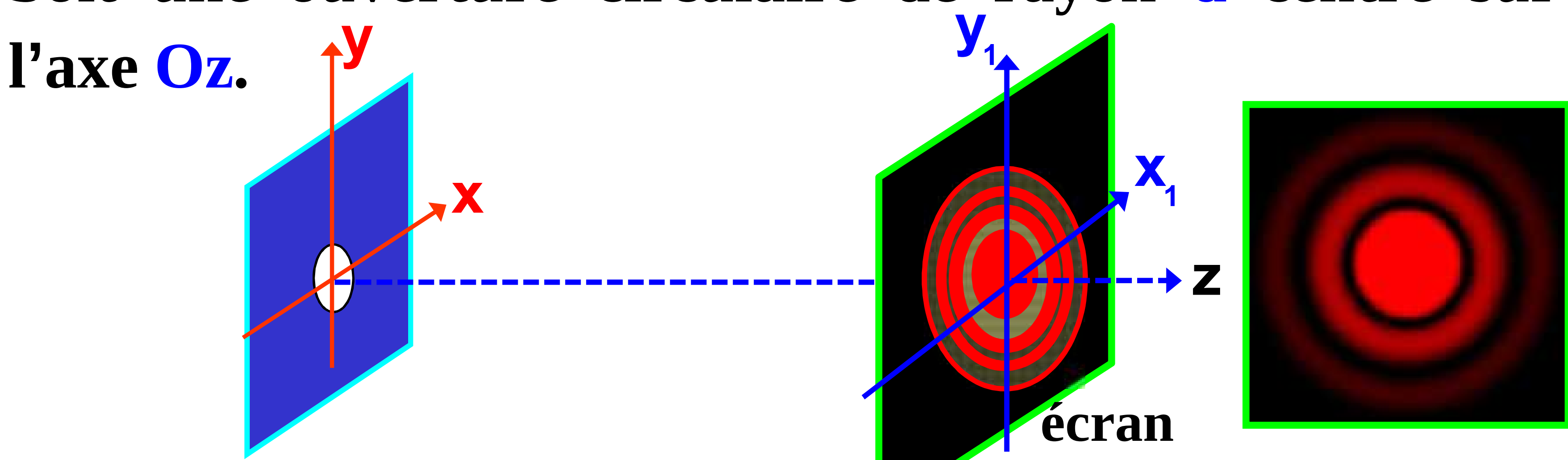
IV – Les exemples



IV.2 – Diffraction par une ouverture circulaire

Les diaphragmes circulaires sont très utilisés en optique. La diffraction par une ouverture circulaire est donc très importante.

Soit une ouverture circulaire de rayon d centré sur l'axe Oz.



La symétrie de révolution implique que la figure de diffraction aura cette même symétrie. On observera des *anneaux* alternativement lumineux et sombres.

IV – Les exemples

On effectue le changement de variables suivant :

$$x = \rho\cos(¨) \quad \text{et} \quad y = \rho\sin(¨) \quad \Rightarrow \quad dS = dxdy = \rho d\rho d¨$$

Puisqu'il y a une symétrie de révolution, on peut se placer dans un plan contenant l'axe optique Oz (exemple xOz).

L'amplitude diffractée à l'infini s'écrit :

$$A(\alpha,\beta) = C\iint_S \exp(-ik(\alpha x + \beta y))dS$$

$$= C\int_0^{2\pi}\int_0^{d} \exp(-ik.\sin(\theta)\rho\cos(¨F)\rho d\rho d¨$$

Cette expression ne s'intègre pas au moyen des fonctions élémentaires mais nécessite l'introduction des fonctions de *Bessel*.

IV – Les exemples

L'intensité s'exprime alors : $$I = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$$

Où $J_1(m)$ est une fonction de ***Bessel*** de premier ordre,

et $$m = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Remarque

On peut aussi aborder l ' intégration par des développements en série. En posant $x = \pi d.\sin(\theta)/\lambda$ et en intégrant l'exponentielle en fonction de x et en intégrant terme à terme. Ce qui permet de faire des calculs numériques.

IV – Les exemples

La tache centrale porte souvent le nom de *tache d'Airy*, son importance est grande dans la théorie de formation des images et c'est en elle que se trouve concentrée "presque toute la lumière".

On retiendra que les minimums nuls ne sont pas équidistants.

Le premier minimum nul s'obtient pour $m = 3{,}832$ c.à.d pour :

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{2d}$$

Le premier anneau lumineux a une intensité relative de $1{,}75\times10^{-2}$.

IV – Les exemples

I / I_o

1

$1,7 \times 10^{-2}$

$0,45 \times 10^{-2}$

θ

0

$\frac{1,22\ \lambda}{2d}$ $\frac{2,23\ \lambda}{2d}$ $\frac{3,24\ \lambda}{2d}$

d

$\theta = \frac{1{,}22\ \lambda}{2d}$

$= \frac{2{,}23\ \lambda}{2d}$

F'

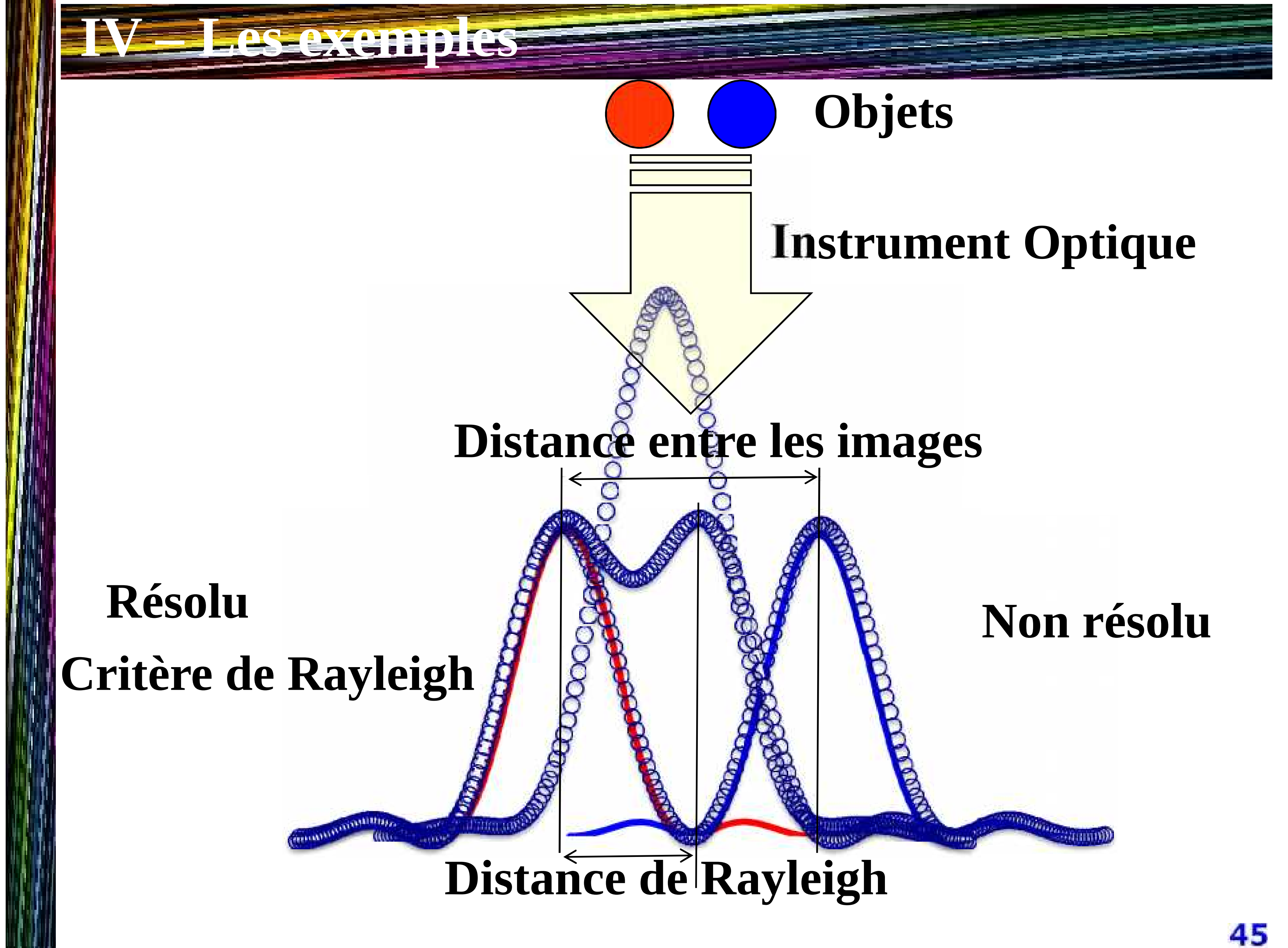
IV – Les exemples

Ce phénomène est responsable de la limitation du *pouvoir séparateur* des instruments d'optique.

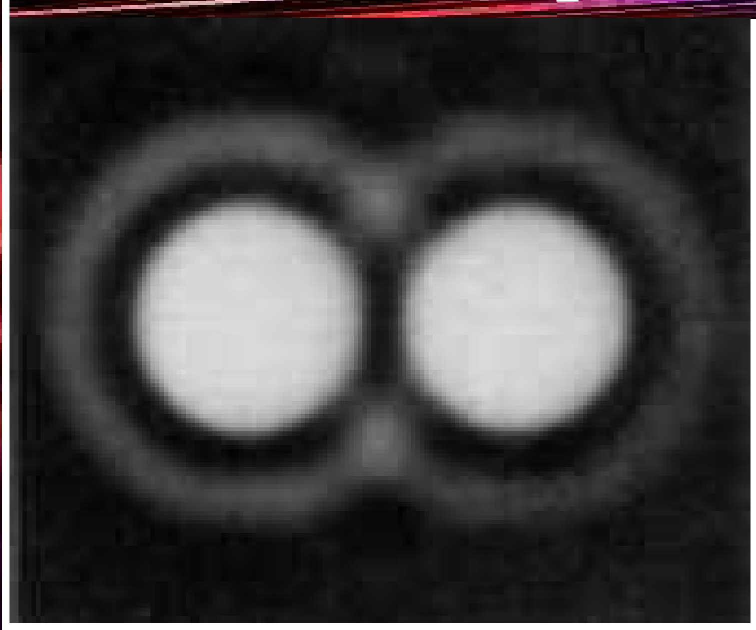
Selon le critère de Lord *Rayleigh* :

"deux points sont séparés par l'objectif lorsque le centre de la figure de diffraction du premier se trouve sur le premier anneau sombre de l'image de diffraction de l'autre".

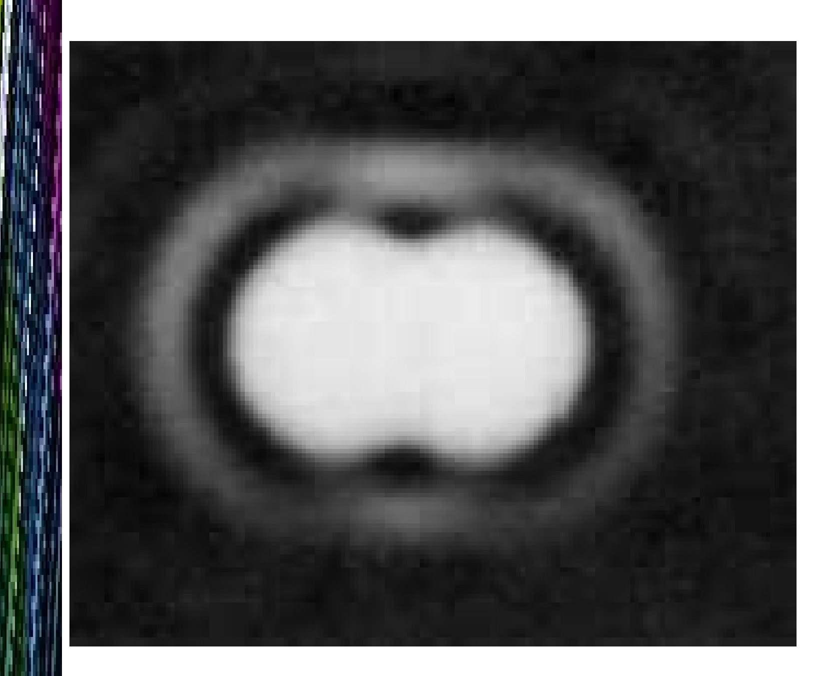
Remarque : Ce critère n'est toutefois rigoureux que si les sources sont incohérentes ; si elles sont cohérentes, il faut tenir compte des interférences.


IV – Les exemples
Objets
Instrument Optique
Distance entre les images
Résolu
Critère de Rayleigh
Non résolu
Distance de Rayleigh

IV – Les exemples



Cercles d'Airy tangents



Tout juste résolus (Rayleigh)

IV.3 – Relation entre l'objet diffractant et la figure de diffraction

Nous prenons comme modèle l'objet diffractant, la fente rectangulaire éclairée par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe optique.

L'amplitude diffracté s'écrit :

$$A(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x,y)\exp(-ik(\alpha x + \beta y))dxdy$$

IV.3.1 – Dilatation

Supposons que l'on effectue des affinités de rapport **m** suivant **Ox** et **n** suivant **Oy**. L'amplitude s'écrit :

$$A(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(mx,ny)\exp(-ik(\alpha x + \beta y))dxdy$$

Si on effectue le changement de variables suivant :

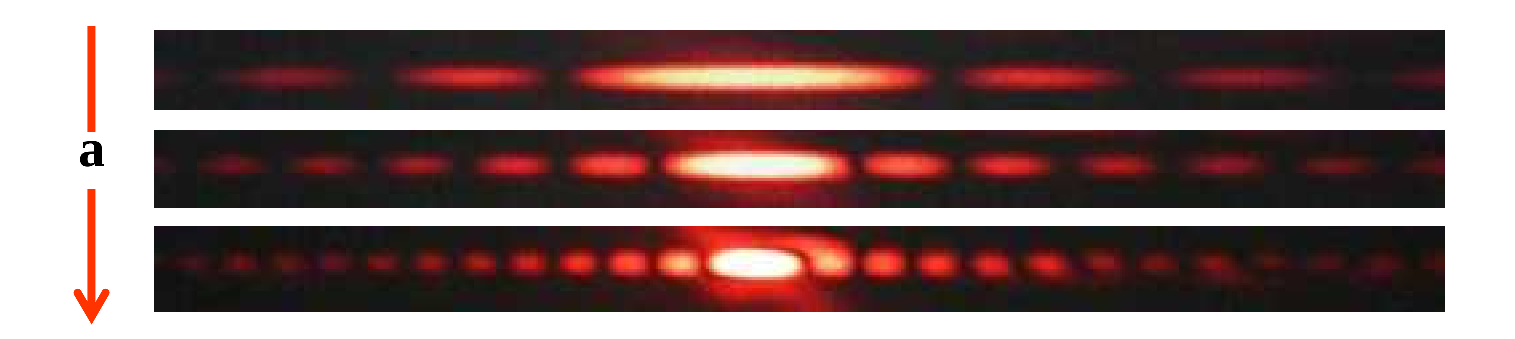
$x' = mx$ et $y' = ny$ on obtient :

$$A(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x',y')\exp\left[-ik\left(\alpha\frac{x'}{m} + \beta\frac{y'}{n}\right)\right]d\left(\frac{x'}{m}\right)d\left(\frac{y'}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{mn}A\left(\frac{\alpha}{m},\frac{\beta}{n}\right)$$

IV – Les exemples

Ainsi, toute dilatation de l'ouverture diffractante dans une direction, se traduit par la contraction de la figure de diffraction suivant la même direction et inversement.



IV.3.2 – Translation

Supposant que l'on translate l'ouverture diffractante :

$$x \rightarrow x' = x + x_o \quad \text{et} \quad y \rightarrow y' = y + y_o$$

$$A'(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x',y')e^{-ik(\alpha(x'-x_o)+\beta(y'-y_o))}dx'dy'$$

$$= e^{ik(\alpha x_o+\beta y_o)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x',y')e^{-ik(\alpha x'+\beta y')}dx'dy'$$

$$A'(\alpha,\beta) = e^{ik(\alpha x_o+\beta y_o)}A(\alpha,\beta)$$

L ' amplitude est multipliée par un facteur de translation mais l'éclairement de l'écran est inchangé.

$$I'(\alpha,\beta) = A'A'^* = AA^* = I(\alpha,\beta)$$

La figure de diffraction reste donc immobile sur l'écran lorsqu'on translate l'objet diffractant.

IV.3.3 – Inclinaison du faisceau incident

Lorsque la fente rectangulaire est éclairée par un faisceau parallèle monochromatique incliné par rapport à l'axe optique.

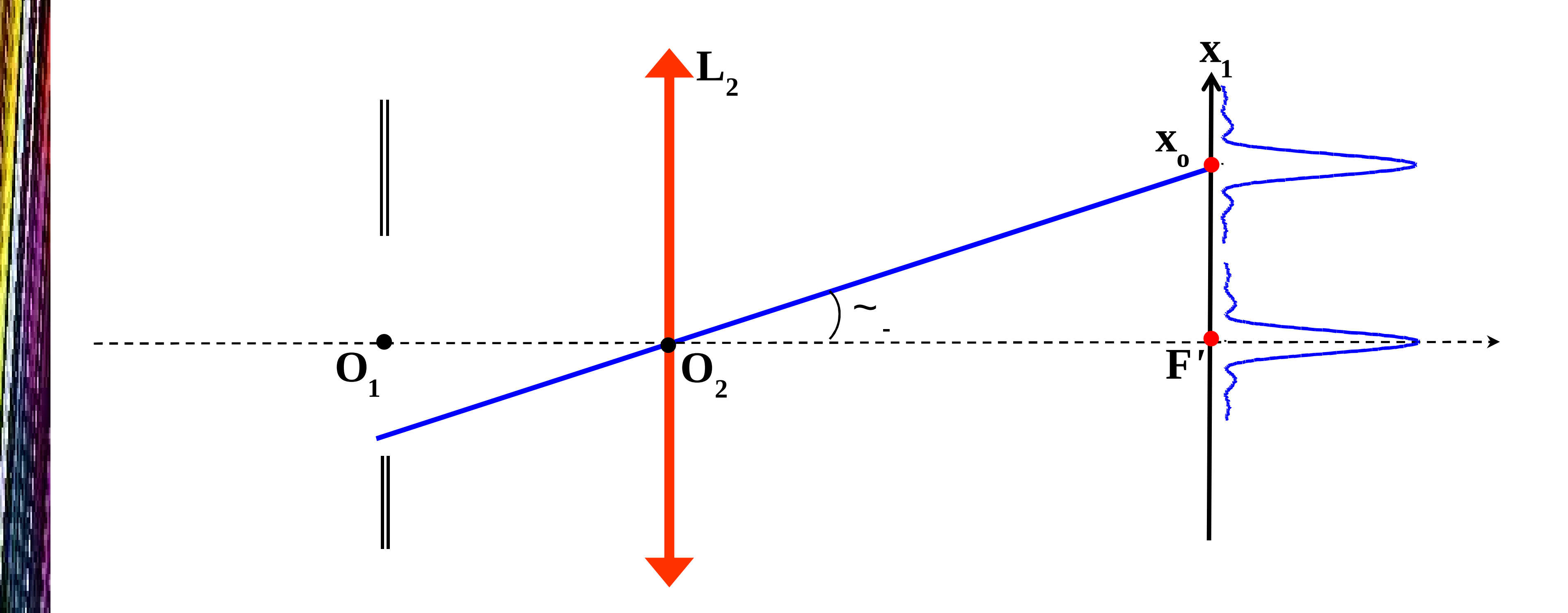
Soient α_o et β_o les cosinus directeurs de cette direction.

On montre facilement que $(\alpha x + \beta y)$ doit être remplacé par $((\alpha - \alpha_o)x + (\beta - \beta_o)y)$ et donc $A(\alpha, \beta)$ devient :

$$A(\alpha - \alpha_o, \beta - \beta_o) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x,y)e^{-ik\left[(\alpha-\alpha_o)x+(\beta-\beta_o)y\right]}dxdy$$

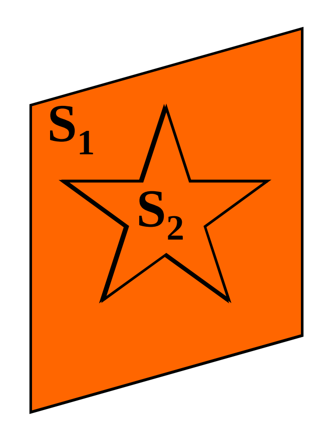
La figure de diffraction est décalée, elle a pour centre :

$$x_o = \alpha_o f \qquad \text{et} \qquad y_o = \beta_o f$$


L2
x1
x0
~
O1
O2
F'

IV.4 – Les écrans complémentaires

Considérons deux ouvertures complémentaires de surface S_1 et S_2.



Considérons l'une des deux ouvertures diffractantes et un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente parfaite.

L'ouverture diffractante est uniformément éclairée.

M en dehors du foyer objet est nulle :

$$I = AA^* = 0 \quad \text{donc } A = 0$$

Appliquons le principe de *Huyghens-Fresnel* à la surface **S** :

$$A = \iint_S dA = \iint_{S_1} dA + \iint_{S_2} dA = A_1 + A_2 = 0$$

$\Rightarrow A_1 = -A_2$ et par suite $I_1 = I_2$

Ce résultat constitue le théorème de *Babinet* :

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par deux écrans complémentaires sont identiques.

IV – Les exemples

Cas d'une fente fine et d'un fil ayant le même diamètre :

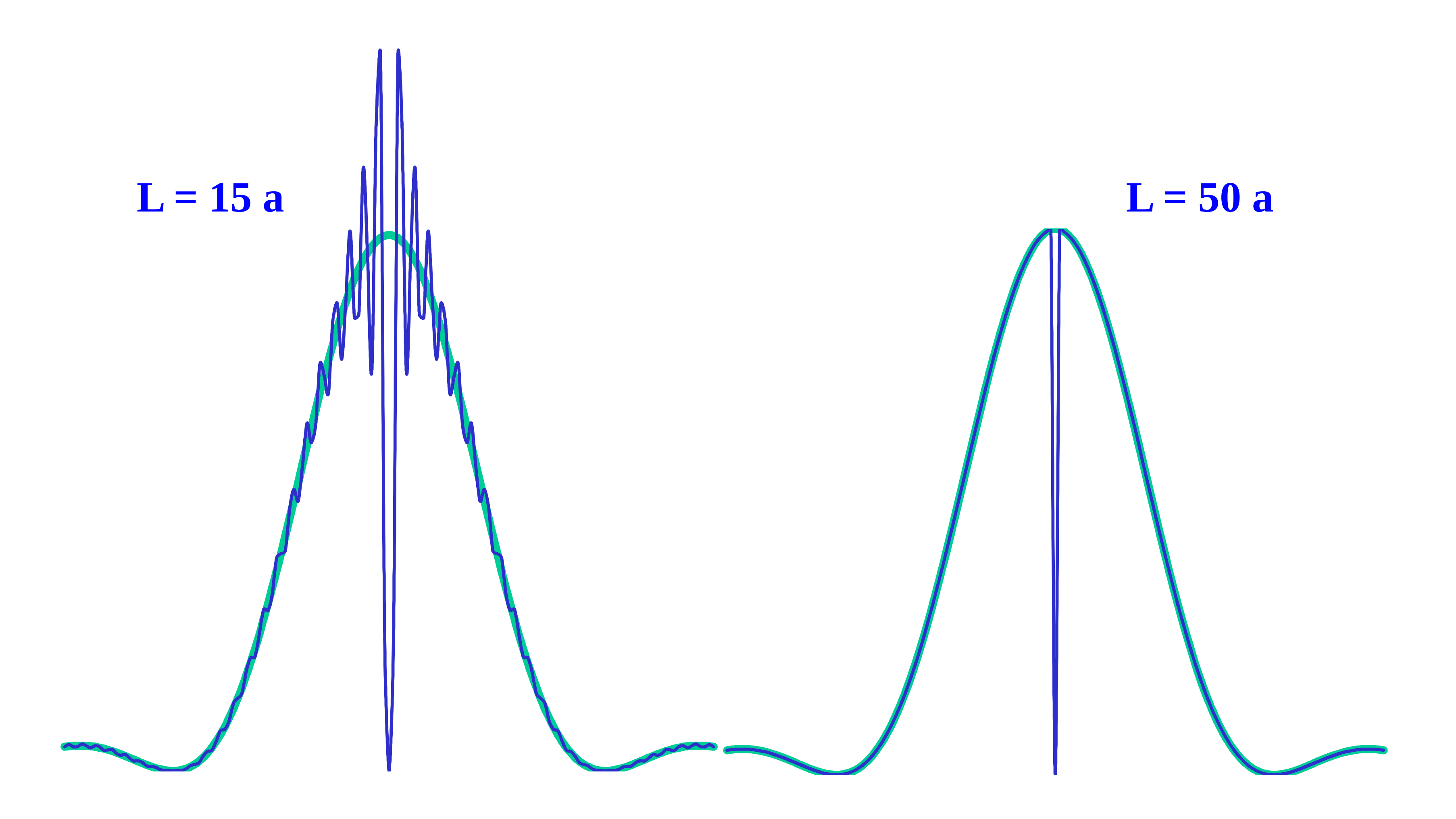
$$\begin{cases} T(x) = 0 & x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ T(x) = 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour le fil

$$A(M) = KA_o \int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} e^{ikx\alpha}\, dx + KA_o \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} e^{ikx\alpha}\, dx$$

$$A(M) = KA_o \int_{-L}^{-\frac{a}{2}} e^{ikx\alpha}\, dx + KA_o \int_{L}^{+\infty} e^{ikx\alpha}\, dx$$

$$A(M) = KA_o \left(\sin c(k\alpha L) - \sin c\left(\frac{k\alpha a}{2} \right) \right)$$



Les figures de diffraction sont différentes uniquement dans la zone proche de l'axe.

IV.5 – Apodisation -Amélioration de la résolution

Apodisation signifie littéralement suppression des pieds sous-entendu, pour la diffraction, suppression des maxima secondaires. On peut choisir comme exemple la fonction de transmission suivante :

T = 1

$$\begin{cases} T(x,y) = T(x) = 1 + \dfrac{2x}{a} & x \in \left[-\dfrac{a}{2}, 0\right] \\ T(x,y) = T(x) = 1 - \dfrac{2x}{a} & x \in \left[0, \dfrac{a}{2}\right] \end{cases}$$

$$A(M) = K \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A_o T(x) e^{ikx\alpha} \, dx$$

On pose $KA_o = K'$

$$A(M) = K' \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \left(1 + \frac{2x}{a}\right) e^{ikx\alpha} dx + K' \int_{0}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) e^{ikx\alpha} dx$$

$$A(M) = K' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ikx\alpha} dx + K' \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \frac{2x}{a} e^{ikx\alpha} dx - K' \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{2x}{a} e^{ikx\alpha} dx$$

$$A(M) = \underbrace{K' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ikx\alpha} dx}_{A21} - \underbrace{K' \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{4x}{a} \left(\frac{e^{ikx\alpha} + e^{-ikx\alpha}}{2}\right) dx}_{A22}$$

$$A_{21}(\alpha) = K' a.\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \alpha\right)$$

$$A_{22}(\alpha) = -K' \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{4x}{a} \cos(kx\alpha) dx$$

IV – Les exemples

$$A_{22}(\alpha) = -K' \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{4x}{a} \cos(kx\alpha)\,dx$$ se calcule par partie.

posons $u = \dfrac{4x}{a}$ $dv = \cos(kx\alpha)$ $du = \dfrac{4}{a}dx$ $v = \dfrac{\sin(kx\alpha)}{k\alpha}$

$$A_{22}(\alpha) = -\frac{4K'}{a}\left[\frac{x.\sin(kx\alpha)}{k\alpha}\right]_0^{\frac{a}{2}} + \frac{4K'}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin(kx\alpha)}{k\alpha}dx$$

$$A_{22}(a) = -K'a\frac{\sin\left(\dfrac{\pi a}{\lambda}\alpha\right)}{\dfrac{\pi a}{\lambda}\alpha} + K'a\frac{1-\cos\left(\dfrac{\pi a}{\lambda}\alpha\right)}{\left(\dfrac{\pi a}{\lambda}\alpha\right)^2}$$

Finalement,

$$A(\alpha) = K'a.\text{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right) - K'a.\text{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right) + K'a\frac{1-\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right)^2}$$

en transformant le cosinus en sinus :

$$2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$$

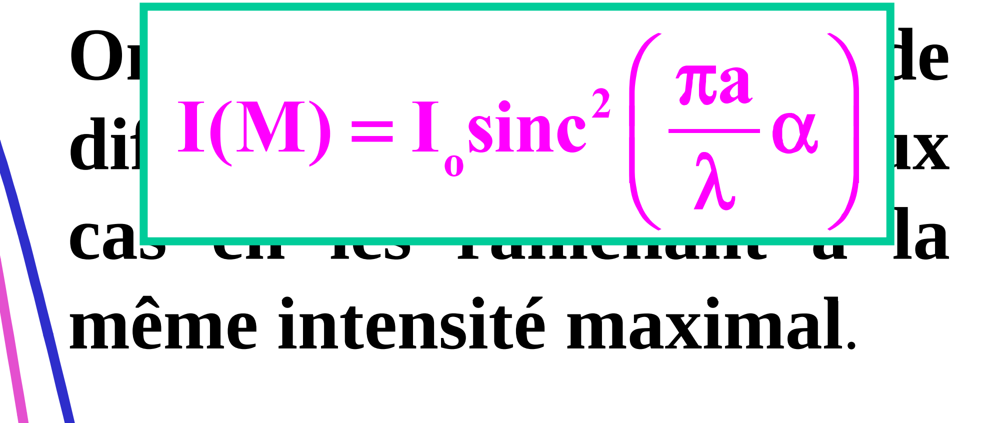
On obtient

$$A(\alpha) = \frac{K'a}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{2\lambda}\alpha\right)}{\frac{\pi a}{2\lambda}\alpha}\right)^2 = \frac{K'a}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{2\lambda}\alpha\right)$$

IV – Les exemples

$$A(M) = \frac{K'a}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{2\lambda}\alpha\right)$$

$$I(M) = I_o\,\mathrm{sinc}^4\left(\frac{\pi a}{2\lambda}\alpha\right)$$

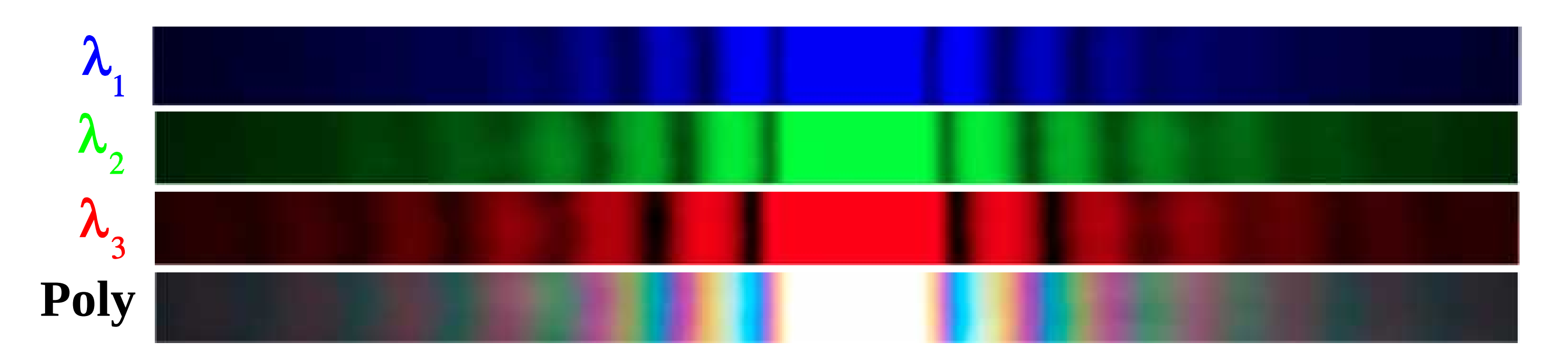


$$I(M) = I_o\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right)$$

On [...] de dif[...]ux cas en les ramenant à la même intensité maximal.

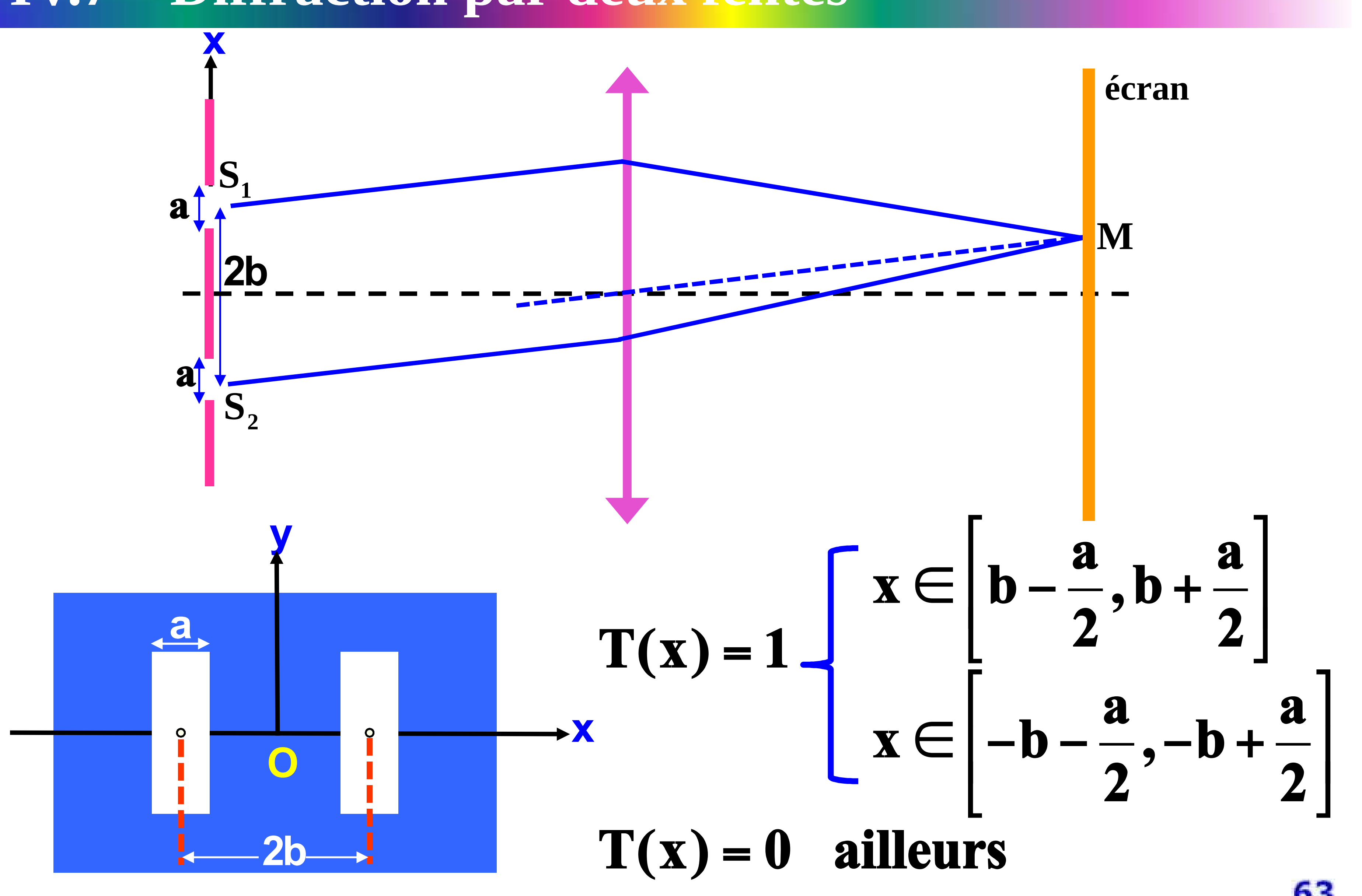
IV.6 – Diffraction par une source polychromatique

Superposition de plusieurs ondes monochromatiques.



La lumière blanche est une lumière polyochromatique.
Sa diffraction se caractérise par une tâche centrale blanche due à la superposition de toutes les couleurs la composant, entourée d'irisation.

IV.7 – Diffraction par deux fentes



$$T(x) = 1 \begin{cases} x \in \left[b - \frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}\right] \\ x \in \left[-b - \frac{a}{2}, -b + \frac{a}{2}\right] \end{cases}$$

$$T(x) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

IV – Les exemples

$$A(M) = A_o \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\, e^{ikx\alpha}\, dx$$

$$A(M) = \frac{A_o}{ik\alpha}\left[e^{ikx\alpha}\right]_{b-\frac{a}{2}}^{b+\frac{a}{2}} + \frac{A_o}{ik\alpha}\left[e^{ikx\alpha}\right]_{-b-\frac{a}{2}}^{-b+\frac{a}{2}}$$

$$A(M) = \frac{2A_o e^{ikb\alpha}}{k\alpha}\sin\left(k\alpha\frac{a}{2}\right) + \frac{2A_o e^{-ikb\alpha}}{k\alpha}\sin\left(k\alpha\frac{a}{2}\right)$$

$$A(M) = 2A_o \cos(kb\alpha)\, \sin c\left(k\alpha\frac{a}{2}\right)$$

$$I(M) = 4A_o^2 \cos^2(kb\alpha)\, \sin c^2\left(k\alpha\frac{a}{2}\right)$$

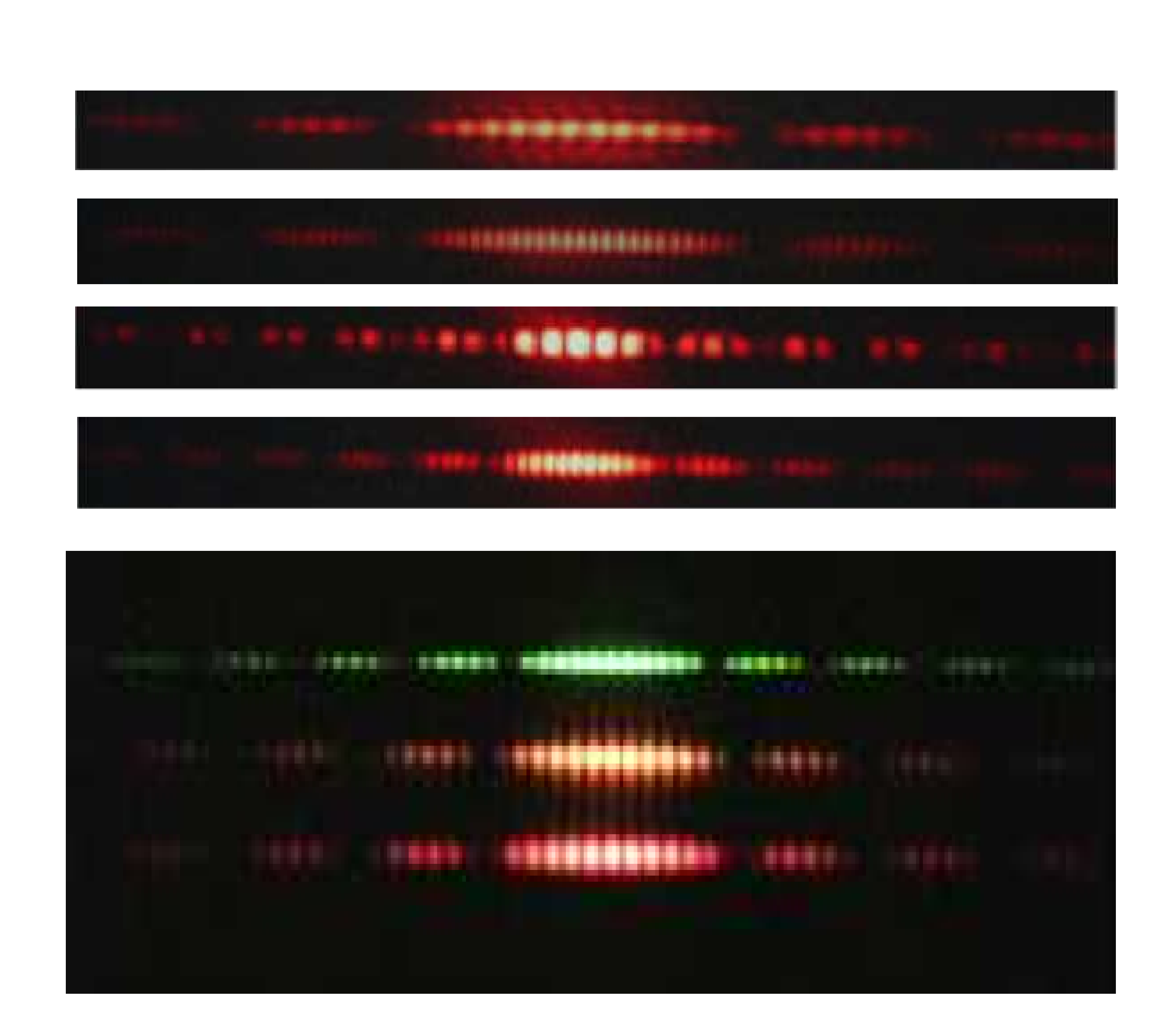
IV – Les exemples

$\cos^2(kb\alpha)$

$\text{sinc}^2\left(k\alpha\frac{a}{2}\right)$

I(M)

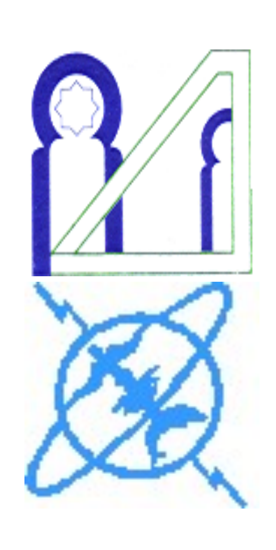
IV – Les exemples



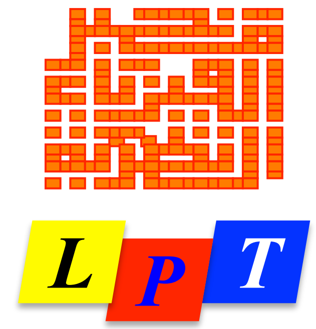
FIN 66

Chapitre VI

Réseaux

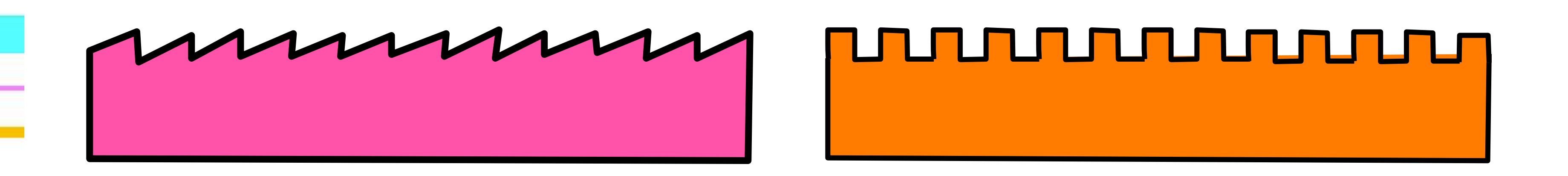


H. EL RHALEB
Université Mohammed V, Rabat, Agdal
Faculté des Sciences,
Département de Physique,
Laboratoire de Physique Théorique
Equipe Photonique
elrhaleb@fsr.ac.ma





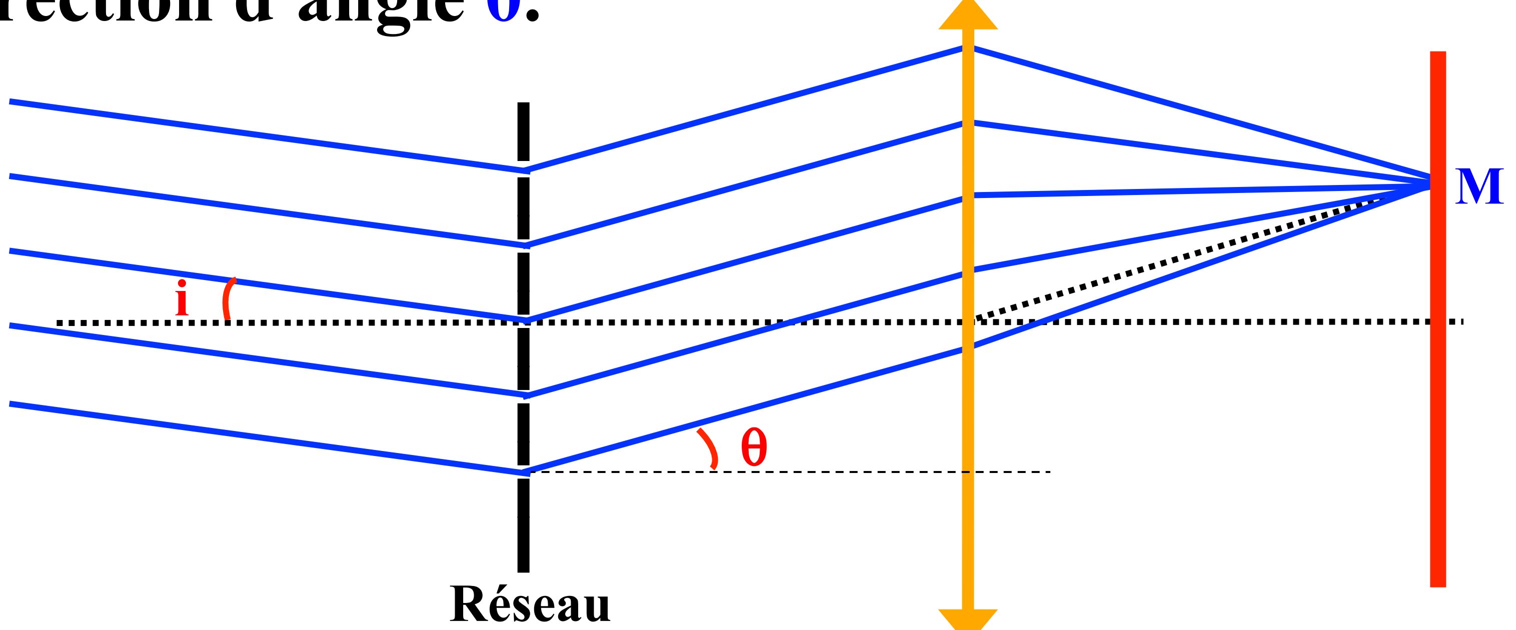
Un réseau de est un dispositif composé d'une série de fentes parallèles (réseau en transmission), ou de rayures réfléchissantes (réseau en réflexion). Ces traits sont espacés de manière régulière, l'espacement est appelé le "*pas*" du réseau.



I - La théorie élémentaire du réseau

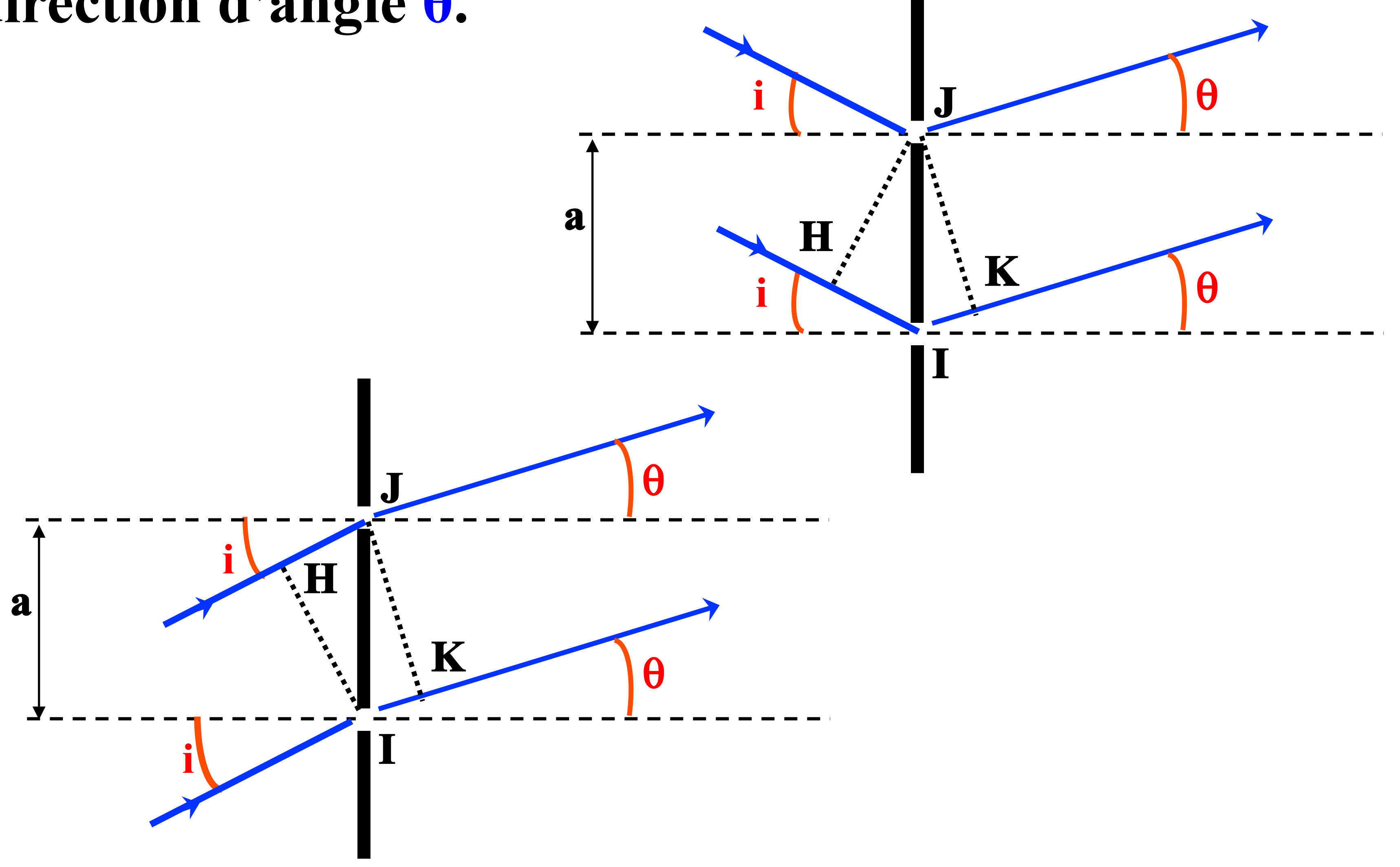
Considérons un réseau de transmission dont 2 fentes consécutives sont distantes de a. Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle monochromatique de longueur d'onde λ sous une incidence i.

On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini dans la direction d'angle θ.



I - La théorie élémentaire du réseau

On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini dans la direction d'angle θ.



I - La théorie élémentaire du réseau

$$\delta = IK - JH = a\left(\sin(\theta) - \sin(i)\right)$$

En général les rayons diffractés par les différentes fentes présentent un déphasage entre eux.

On obtiendra un maximum d'intensité lumineuse pour :

$$\delta = m\lambda \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2m\pi$$

en effet deux rayons consécutifs présenteront un déphasage multiple de 2π.

Les directions de ces maxima sont donc données par :

$$\sin(\theta) = m\frac{\lambda}{a} + \sin(i)$$

I - La théorie élémentaire du réseau

Pour $m = 0$ on obtient le prolongement du faisceau incident.

Pour $m \neq 0$ la position des maximum dépend de la longueur d'onde λ : le réseau disperse la lumière. On obtient alors des franges très fines parallèles aux fentes du réseau et correspondant aux différentes valeurs de l'entier m.

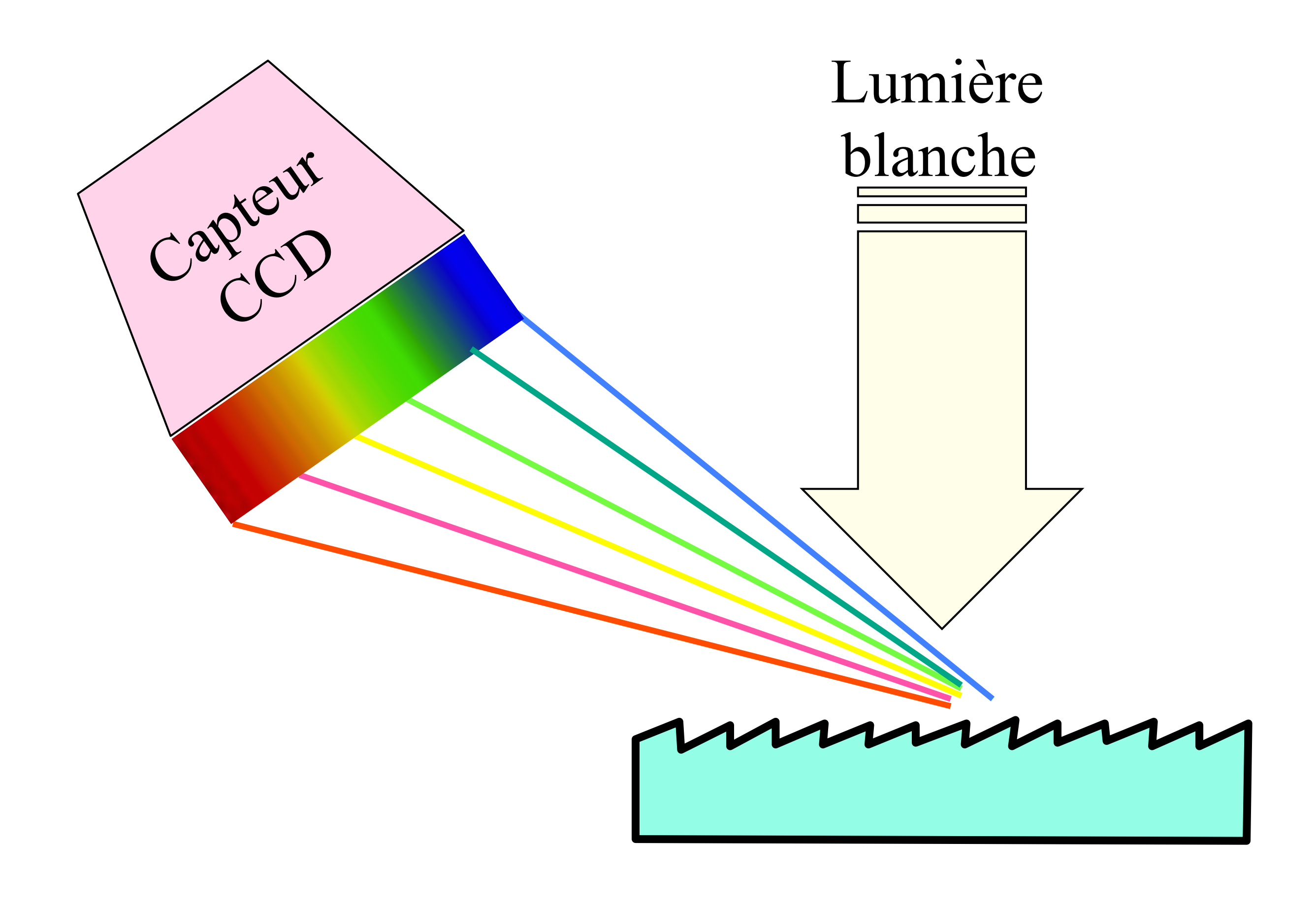
Remarque **: Nous avons considéré ici un réseau par transmission; des conclusions analogues sont valables pour un réseau par réflexion : un exemple quotidien est donné par un disque compact (CD) :**

I - La théorie élémentaire du réseau

La lumière blanche est diffractée par les variations qui forment les bits et qui jouent le rôle des traits du réseau.

Si l'on envoie une lumière monochromatique, le réseau réfléchit plusieurs taches ; la direction de réflexion des taches dépend de la distance entre les traits et de la longueur d'onde.

I - La théorie élémentaire du réseau



II - Calcul de l'intensité diffractée

II.1 - Expression de l'intensité diffractée

Soit N le nombre total de fentes du réseau. Le déphasage "à l'infini" entre les ondes diffractées par deux fentes successives s'écrit :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \quad \text{avec} \quad \delta = a(\sin(\theta) - \sin(i))$$

Désignons par $U_1 = U_0 e^{-i\omega t}$ la vibration diffractée par la 1ère fente. $U_p = U_0 e^{-i\omega t} e^{i(p-1)\varphi}$ la vibration diffractée par la $p^{ème}$ fente. La vibration totale est :

$$U = \sum_{p=1}^{N} U_p = U_0 e^{-i\omega t}\left[1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots + e^{i(N-1)\varphi}\right]$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

$$U = U_0\, e^{-i\omega t}\left[\frac{1-e^{iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right]$$

$$U = U_0\, e^{-i\omega t}\,\frac{e^{iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\left[\frac{e^{iN\frac{\varphi}{2}}-e^{-iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}}\right]$$

Soit encore :

$$U = U_0\, e^{-i\omega t}\, e^{i(N-1)\frac{\varphi}{2}}\,\frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On remarque que l'amplitude totale a la phase de la vibration diffractée par la fente au milieu du réseau.

II - Calcul de l'intensité diffractée

L'intensité diffractée dans la direction θ est :

$$I = I_o \left[\frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

avec

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(i)) \\ I_o = U_o^2 \end{cases}$$

II.2 - Étude de la courbe $I = I(\varphi)$

Si les fentes sont très fines, on peut supposer en première approximation, que l'amplitude diffractée est indépendante de θ; I_o est alors une constante.

II - Calcul de l'intensité diffractée

L'expression de $I(\varphi)$ montre que :

1- Pour $\varphi = 2m\pi$ (m entier), I est indéterminée; étant donnée la périodicité de $I(\varphi)$, on peut lever cette indétermination en examinant le comportement de $I(\varphi)$ au voisinage de $\varphi = 0$.

Près de $\varphi = 0$,

$$\begin{cases} \sin\left(N\dfrac{\varphi}{2}\right) \approx N\dfrac{\varphi}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \approx \dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{\varphi \to 0} I(\varphi) = N^2 I_o = I_{max}$

II - Calcul de l'intensité diffractée

2- L'intensité I est minimal :

$$I(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{N\varphi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$N\frac{\varphi}{2} = m\pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m \text{ entier} \neq 0 \\ m \text{ non multiple de } N \end{cases}$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

3- Entre 2 maximums principaux, il y a (N-2) maximums secondaires d'intensité très faible.

La dérivée de de I(φ) $\Rightarrow \quad N\,tg\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = tg\left(N\dfrac{\varphi}{2}\right)$

Cette équation est une équation transcendantale en φ et ne peut être résolue que numériquement. La résolution graphique donne :

$$N\frac{\varphi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = (2m+1)\dfrac{\pi}{N} \\ \varphi = n\pi \end{cases}$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

Les maxima secondaires sont très peu marqués.

On peut le vérifier en calculant I pour φ = 3π/N (premier maximum secondaire) :

$$I_1 = I(3\pi / N) = \frac{I_o}{(\sin(3\pi / 2N))^2}$$

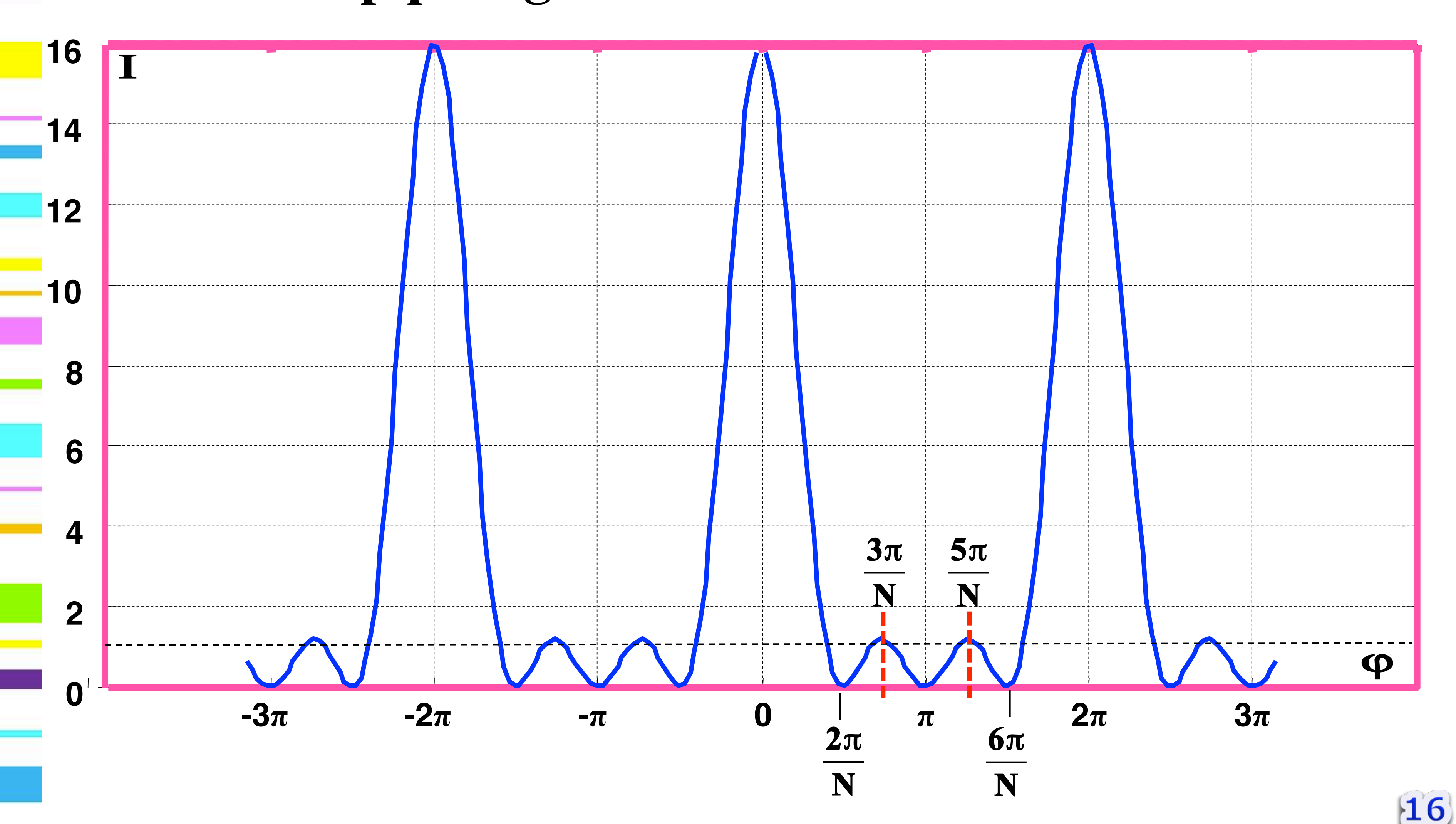
si N >> 1, sin (3π/2N) = 3π/2N

$$\Rightarrow \quad I_1 = I_o \frac{4N^2}{9\pi^2} = 4 \times 10^{-2} N^2 I_o$$

Les maxima secondaires sont pratiquement invisibles.

II - Calcul de l'intensité diffractée

Les variations de I(φ) pour N = 4. Dans la pratique N est beaucoup plus grand.



II - Calcul de l'intensité diffractée

En résumé on retiendra qu'éclairé par une radiation monochromatique de longueur d'onde λ, un réseau dont les fentes sont équidistantes de a donne des maxima principaux d'intensité dans les directions définies par :

$$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$$

Ces maxima ont la position prévue par la théorie élémentaire et sont entourés par des maxima secondaires invisibles dans la pratique.

II.3 - Amélioration du calcul précédent

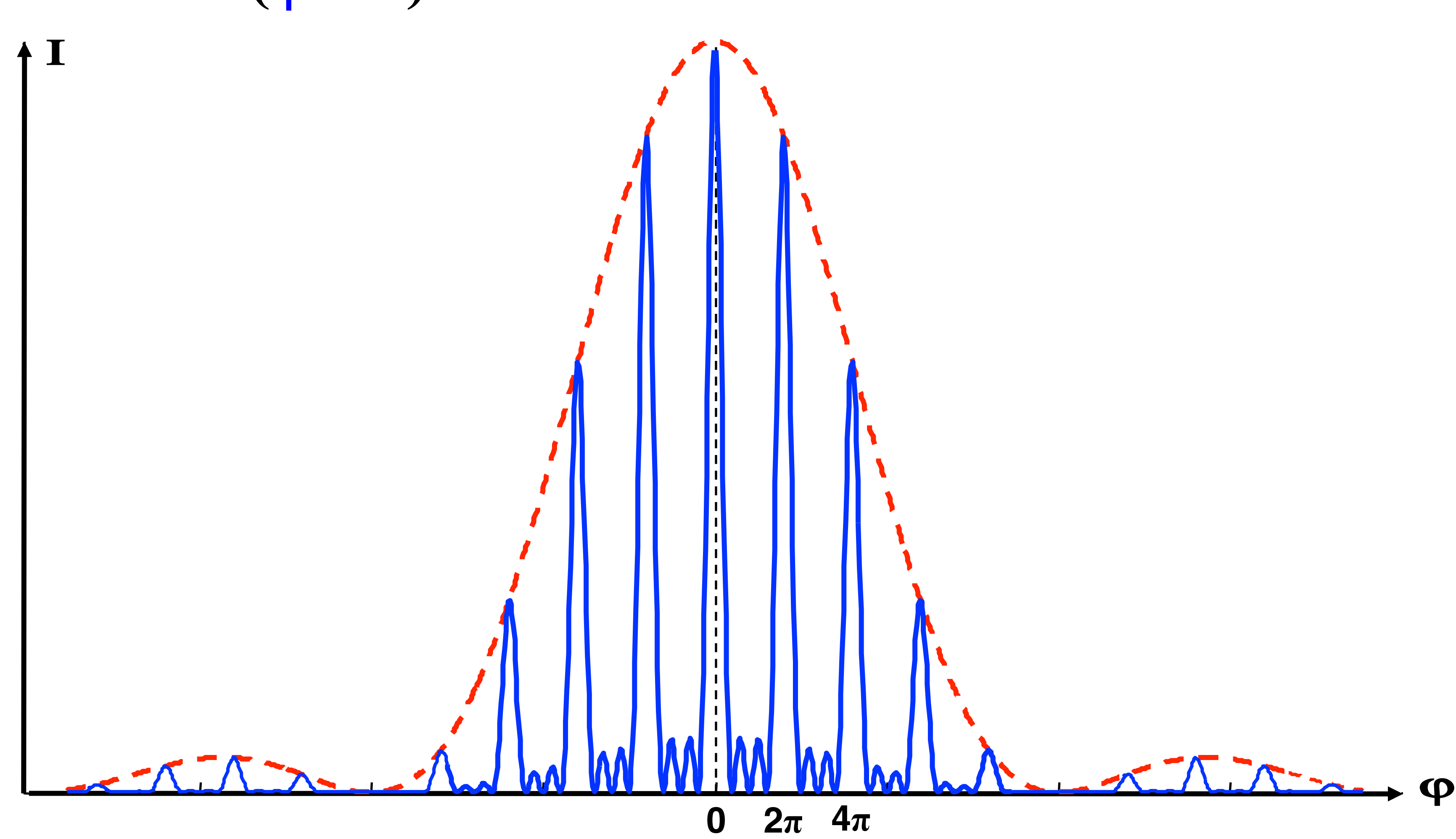
Dans la discussion précédente, nous avons admis que chaque fente du réseau était assez fine pour que l'on puisse négliger la variation de l'intensité diffractée en fonction de θ.

L'expression de I est améliorer en appliquant à chaque fente du réseau les résultats de la théorie de la diffraction par une fente.

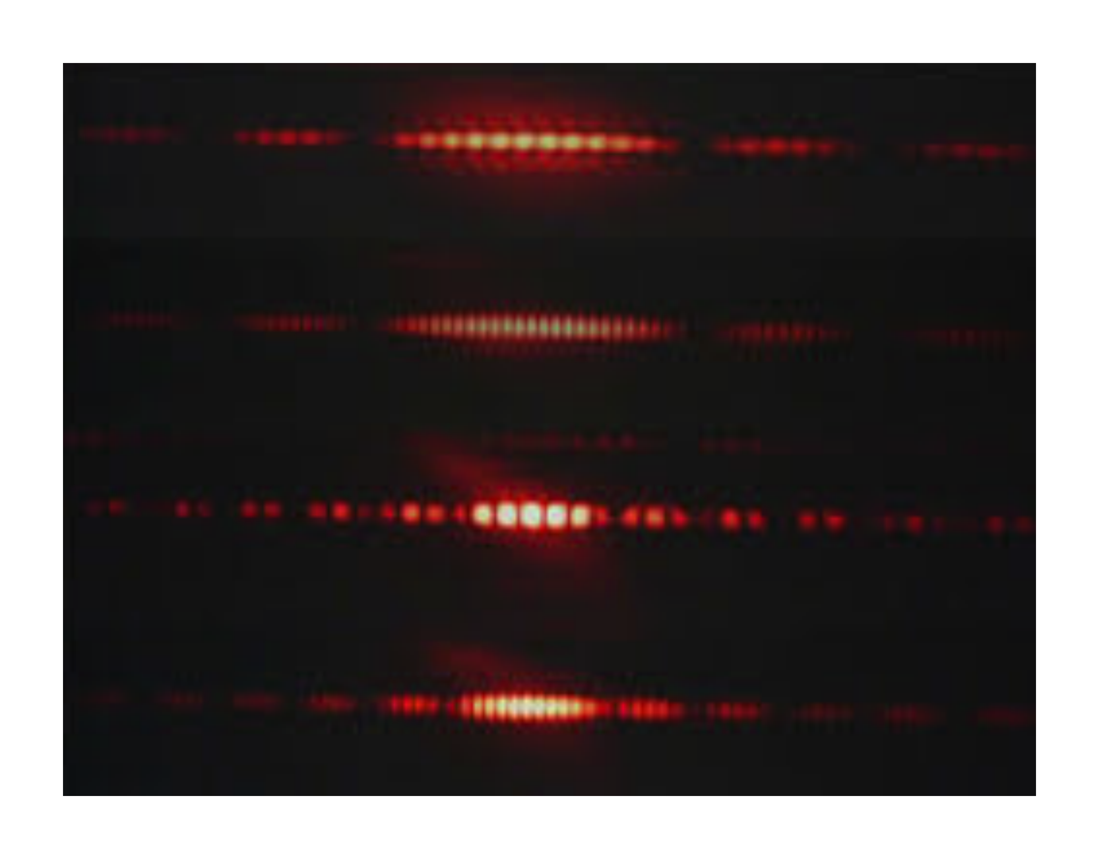
$$I = i_o \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^2 \left[\frac{\sin\left(N \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right]^2$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

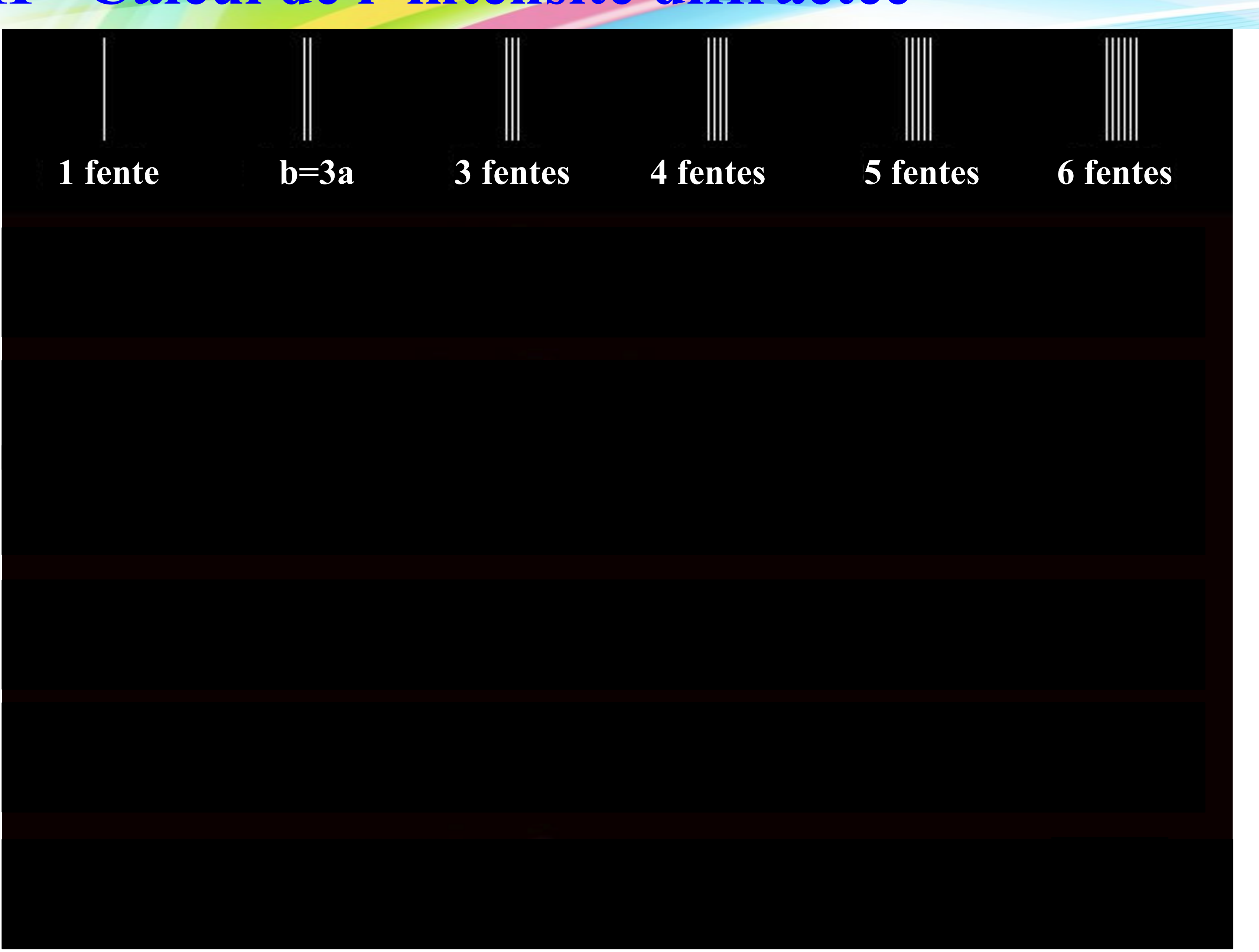
On remarque sur cette courbe un affaiblissement des spectres d'ordre m par rapport au faisceau non diffracté ($\varphi = 0$).



II - Calcul de l’intensité diffractée



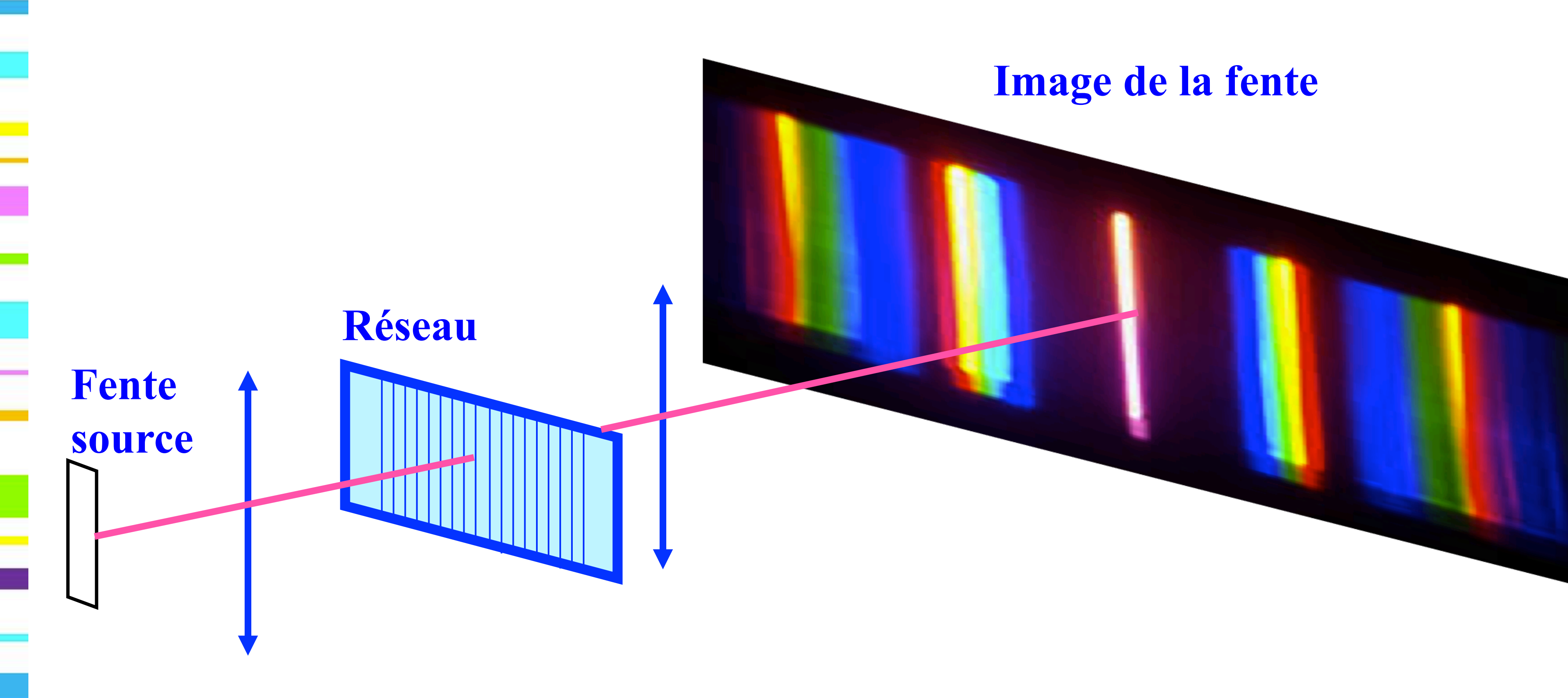
II - Calcul de l'intensité diffractée



III – La formation des spectres

III.1 - Réseau éclairé en lumière blanche

On éclaire un réseau par une source de lumière blanche sous une incidence donnée (par exemple nulle).



III – La formation des spectres

La formule $$\sin(\theta) = m\frac{\lambda}{a} + \sin(i)$$

montre que pour m donné, chaque longueur d'onde est diffractée dans une direction dépendant de λ. On obtient donc des spectres pour les valeurs non nulles de m. À chaque valeur de m correspond un spectre que l'on appelle : spectre d'ordre m.

Pour $m = 0$, $\sin(\theta) = \sin(i)$ quel que soit λ; on obtient donc une image blanche de la fente source.

L'expérience montre qu'à partir d'une certaine valeur de m, il y a empiètement des spectres les uns sur les autres.

III – La formation des spectres

En effet, il y a empiètement lorsqu'une même direction correspondant à deux longueurs d'ondes différentes (et à deux valeurs différentes de m). Cherchons à partir de quel ordre commence l'empiètement des spectres.

D'après l'expression de sinθ, l'empiètement commence entre les spectres d'ordre m et m + 1 tels que :

$$m\lambda_1 = (m+1)\lambda_2$$

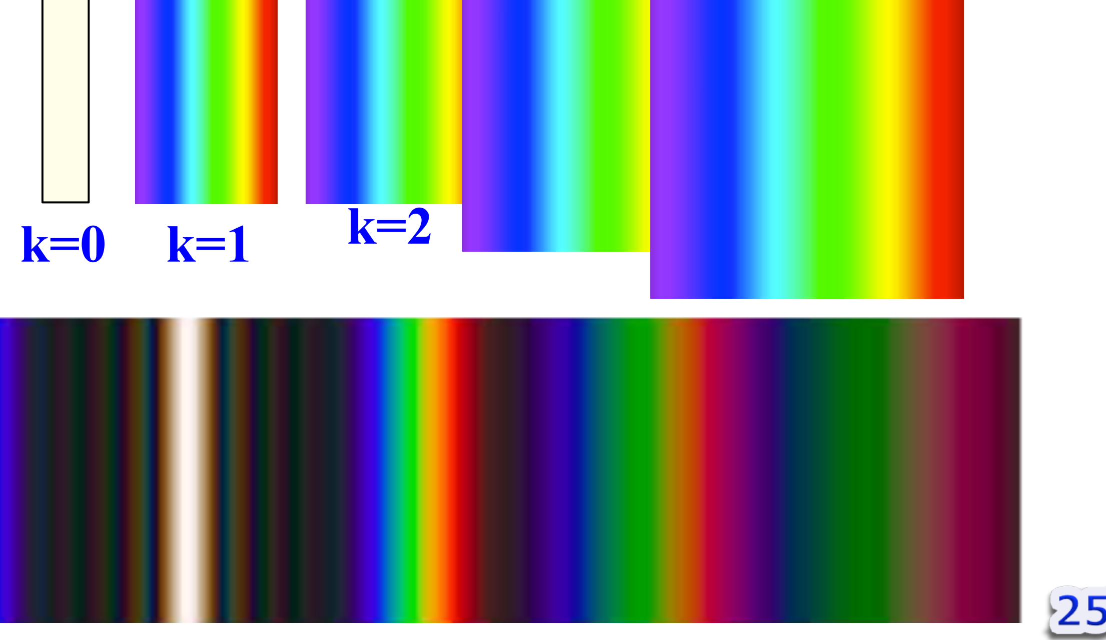
où λ_1 et λ_2 sont deux longueurs d'onde du spectre visible.

III – La formation des spectres

$$m = \lambda_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)$$

On obtient la valeur minimale de m en prenant $\lambda_1 = 0,76$ µm et $\lambda_2 = 0,39$ µm ($m = 1,05$ soit $m_{min} = 2$).

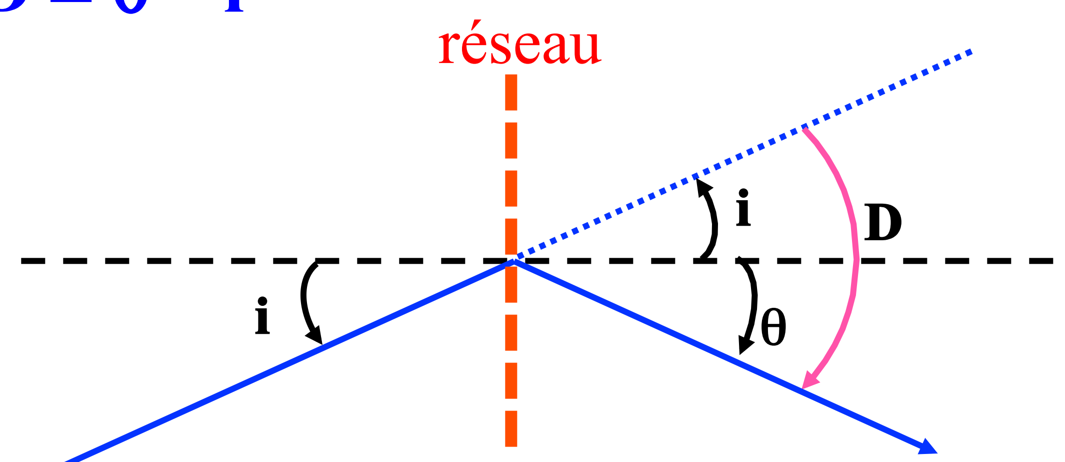
L'empiètement commence donc entre les spectres du 2ème et du 3ème ordre.



III – La formation des spectres

III.2 - Déviation

Pour un réseau éclairé sous une incidence i et diffractant dans la direction θ, l'angle de déviation est, par définition : $D = \theta - i$



Pour le maximum d'ordre m, et une certaine longueur d'onde λ, θ et i sont liés par :

$$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$$

III – La formation des spectres

Soit en différentiant : $\cos(\theta)d\theta = \cos(i)di$

$$\Rightarrow \quad \cos(i) = \cos(\theta)\frac{d\theta}{di}$$

Calculons alors dD/di :

$$\frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1$$

$$\frac{dD}{di} = -2\frac{\sin\left(\frac{\theta + i}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta - i}{2}\right)}{\cos(\theta)}$$

III – La formation des spectres

On a donc une déviation extrémale ($dD/di = 0$) pour $\theta = i$ et $\theta = -i$ (le faisceau difracté est symétrique du faisceau incident par rapport au réseau).

$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$ peut s'écrire sous la forme :

$$2a.\sin\left(\frac{\theta - i}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta + i}{2}\right) = m\lambda$$

or $D = \theta - i$; pour $\theta = -i$, $D = D_{min}$:

$$\sin\left(\frac{D_{min}}{2}\right) = m\frac{\lambda}{2a}$$

Le réseau est au minimum de déviation pour $i = \theta$: cet angle est l'angle de *Bragg*.

III – La formation des spectres

Ce résultat ne dépend pas de l'angle d'incidence i. Si l'on connaît a, en mesurant D_m pour m donné on peut déterminer la longueur d'onde λ de manière "absolue". Cette méthode manque cependant de précision et n'est plus utilisée aujourd'hui.

Notons que si l'on mesure les angles de déviation minimale D_{min} et D'_{min}, pour deux radiations différentes avec un même réseau :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{m}{m'} \frac{\sin(D'_{min}/2)}{\sin(D_{min}/2)}$$

on peut ainsi comparer deux longueurs d'onde.

III.3 - Étalement normal du spectre

Le maximum d'ordre m correspond à :

$$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$$

Cherchons comment varie θ en fonction de λ pour une incidence i donnée : $a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$

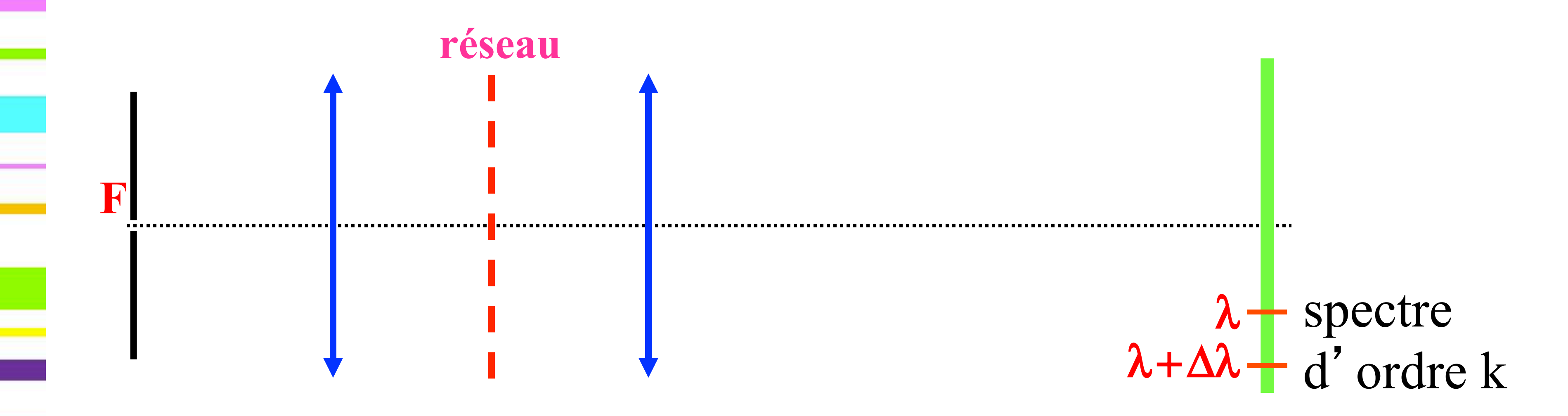
Pour cos(θ) = 1 (θ = 0) on a : $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a} = Cte$

ce qui correspond à un "étalement normal" de spectre autour de la longueur d'onde considérée.

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

IV.1 - Position du problème

La fente F est éclairée par une source comportant deux radiations de longueurs d'onde très voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$ avec $|\Delta\lambda| << \lambda$; on étudie la figure de diffraction donnée de cette fente par un réseau de pas a.



IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Peut-on distinguer dans le spectre d'ordre m les raies correspondant aux deux longueurs d'onde ? Le réseau permet-il de séparer ces deux raies ?

IV.2 - Pouvoir de résolution du réseau

Nous admettrons que l'on peut distinguer les deux raies si le maximum d'intensité lumineuse pour $\lambda + \Delta\lambda$ correspond au premier minimum pour λ dans le même spectre d'ordre m (critère de Rayleigh).

Le déphasage φ entre les ondes diffractées par deux fentes successives s'écrit :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda}\left(\sin(\theta) + \sin(i)\right)$$

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Pour le spectre d'ordre m, le maximum d'intensité correspond à :

$$\sin(\theta) = \sin(i) + m\frac{\lambda}{a}$$

Le premier minimum encadrant ce maximum correspond à :

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

où N est le nombre total de fentes du réseau, ce qui, pour λ donné, correspond à une variation de θ obtenue en différentiant φ et en égalant $\delta\varphi$ à $2\pi/N$:

$$\frac{2\pi a}{\lambda}\cos(\theta)d\theta = \frac{2\pi}{N}$$

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Quand on passe, pour m donné, de λ à $\lambda + \Delta\lambda$, le déplacement du maximum central s'obtient en différenciant $\sin(\theta)$:

$$\cos(\theta_m)d\theta_m = m\frac{\Delta\lambda}{a}$$

On exprime le critère de Rayleigh en écrivant que, pour séparer les deux raies, on doit avoir $d\theta_m > d\theta$ pour $\theta = \theta_m$. On écrira ainsi :

$$m\frac{\Delta\lambda}{a} \geq \frac{\lambda}{Na}$$

soit, à la limite de cette égalité : $$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

IV - Pouvoir de résolution d’un réseau; applications

Cette valeur limite du rapport $\lambda/\Delta\lambda$ porte le nom de pouvoir de résolution du réseau; il ne dépend que du nombre total de traits du réseau et de l'ordre m du spectre. En apparence, il ne dépend pas du "pas" a du réseau.

Cependant, si l'on veut obtenir une valeur élevée de N tout en conservant à la largeur totale $L = Na$ du réseau une valeur raisonnable, il faut prendre une petite valeur pour a. Un réseau en échelette utilisé dans le millième ordre permet d’atteindre un pouvoir de résolution de 10^6.

IV - Pouvoir de résolution d’un réseau; applications

IV.3 - Quelques applications des réseaux

Les réseaux peuvent être utilisés dans des spectrographes pour des mesures de longueur d'onde par interpolation. En particulier dans le domaine de l'infrarouge, un réseau par réflexion remplace avantageusement un prisme en verre qui, dans cette partie du spectre, présenterait une absorption importante. Ces réseaux sont également utilisés dans des monochromateurs.

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

C'est en utilisant des réseaux sous incidence rasante que l'on a pu obtenir les premières déterminations précises des longueurs d'onde des rayons X. Ces rayons X peuvent être ensuite utilisés pour l'étude de la diffraction par des cristaux, ce qui permet de relier les dimensions de la maille des cristaux à la longueur d'onde λ utilisée. On détermine ainsi, finalement, les dimensions de cette maille ce qui permet, en particulier, de remonter au nombre d'*Avogadro*.


Merci